

三、较难题:

1. [2013·全国大纲卷(理)-T12] 已知函数 $f(x) = \cos x \sin 2x$, 下列结论中不正确的是()

A. $y = f(x)$ 的图象关于 $(\pi, 0)$ 中心对称

B. $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数

【解答】解: 对于 A, 因为 $f(\pi+x) = \cos(\pi+x)\sin(2\pi+2x) = -\cos x \sin 2x$,
 $f(\pi-x) = \cos(\pi-x)\sin(2\pi-2x) = \cos x \sin 2x$, 所以 $f(\pi+x) + f(\pi-x) = 0$,
 可得 $y = f(x)$ 的图象关于 $(\pi, 0)$ 中心对称, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+2x) = -\sin x(-\sin 2x) = \sin x \sin 2x$,

$f(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x)\sin(\pi-2x) = \sin x \sin 2x$, 所以 $f(\frac{\pi}{2}+x) = f(\frac{\pi}{2}-x)$,

可得 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 B 正确;

对于 C, 化简得 $f(x) = \cos x \sin 2x = 2\cos^2 x \sin x = 2\sin x(1-\sin^2 x)$,

令 $t = \sin x$, $f(x) = g(t) = 2t(1-t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$,

$\therefore g(t) = 2t(1-t^2)$ 的导数 $g'(t) = 2-6t^2 = 2(1+\sqrt{3}t)(1-\sqrt{3}t)$

$\therefore$ 当 $t \in (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 时或 $t \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 时 $g'(t) < 0$, 函数 $g(t)$ 为减函数;

当 $t \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 时 $g'(t) > 0$, 函数 $g(t)$ 为增函数.

因此函数 $g(t)$ 的最大值为 $t = -1$ 时或 $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时的函数值,

结合 $g(-1) = 0 < g(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{9}$, 可得 $g(t)$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

由此可得 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ 而不是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 C 不正确;

对于 D, 因为 $f(-x) = \cos(-x)\sin(-2x) = -\cos x \sin 2x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

因为 $f(2\pi+x) = \cos(2\pi+x)\sin(4\pi+2x) = \cos x \sin 2x = f(x)$,

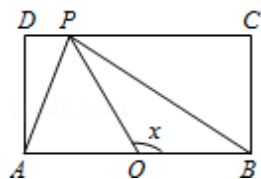
所以 2π 为函数的一个周期, 得 $f(x)$ 为周期函数. 可得 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数,

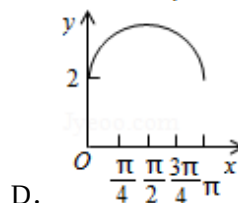
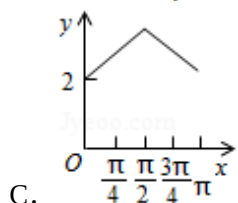
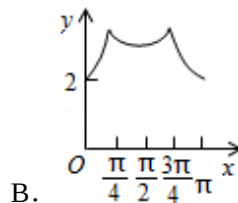
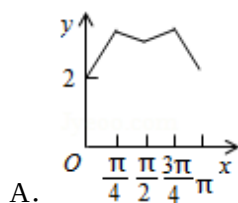
得 D 正确.

综上所述, 只有 C 项不正确.

故选: C.

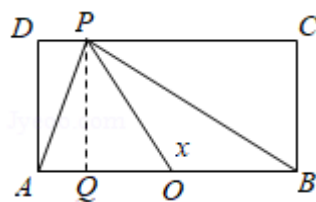
2. [2015·全国新课标 II 卷(文)-T11 (理)-T10] 如图, 长方形 ABCD 的边 $AB = 2$, $BC = 1$, O 是 AB 的中点, 点 P 沿着边 BC, CD 与 DA 运动, 记 $\angle BOP = x$. 将动点 P 到 A, B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$, 则 $y = f(x)$ 的图象大致为()





【解答】解：当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时， $BP = \tan x$ ， $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{4 + \tan^2 x}$ ，

此时 $f(x) = \sqrt{4 + \tan^2 x} + \tan x$ ， $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ，此时单调递增，



当 P 在 CD 边上运动时， $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ 且 $x \neq \frac{\pi}{2}$ 时，

如图所示， $\tan \angle POB = \tan(\pi - \angle POQ) = \tan x = -\tan \angle POQ = -\frac{PQ}{OQ} = -\frac{1}{OQ}$ ，

$$\therefore OQ = -\frac{1}{\tan x},$$

$$\therefore PD = AO - OQ = 1 + \frac{1}{\tan x}, \quad PC = BO + OQ = 1 - \frac{1}{\tan x},$$

$$\therefore PA + PB = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\tan x}\right)^2 + 1},$$

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $PA + PB = 2\sqrt{2}$ ，

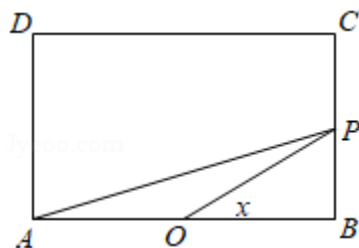
当 P 在 AD 边上运动时， $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi$ ， $PA + PB = \sqrt{4 + \tan^2 x} - \tan x$ ，

由对称性可知函数 $f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，

且 $f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{\pi}{2})$ ，且轨迹为非线型，

排除 A ， C ， D ，

故选： B 。



3. [2016·全国 I 卷(文)-T12] 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增，则 a 的

取值范围是()

- A. $[-1, 1]$ B. $[-1, \frac{1}{3}]$ C. $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ D. $[-1, -\frac{1}{3}]$

【解答】解：函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 的导数为 $f'(x) = 1 - \frac{2}{3}\cos 2x + a\cos x$ ，

由题意可得 $f'(x) \geq 0$ 恒成立，

即为 $1 - \frac{2}{3}\cos 2x + a\cos x \geq 0$ ，

即有 $\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\cos^2 x + a\cos x \geq 0$ ，

设 $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$)，即有 $5 - 4t^2 + 3at \geq 0$ ，

当 $t = 0$ 时，不等式显然成立；

当 $0 < t \leq 1$ 时， $3a \geq 4t - \frac{5}{t}$ ，

由 $4t - \frac{5}{t}$ 在 $(0, 1]$ 递增，可得 $t = 1$ 时，取得最大值 -1 ，

可得 $3a \geq -1$ ，即 $a \geq -\frac{1}{3}$ ；

当 $-1 \leq t < 0$ 时， $3a \leq 4t - \frac{5}{t}$ ，

由 $4t - \frac{5}{t}$ 在 $[-1, 0)$ 递增，可得 $t = -1$ 时，取得最小值 1 ，

可得 $3a \leq 1$ ，即 $a \leq \frac{1}{3}$ 。

综上可得 a 的范围是 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 。

另解：设 $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$)，即有 $5 - 4t^2 + 3at \geq 0$ ，

由题意可得 $5 - 4 + 3a \geq 0$ ，且 $5 - 4 - 3a \geq 0$ ，

解得 a 的范围是 $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ 。

故选：C。

4. [2017 全国 II 卷(理)-T12] 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形， P 为平面 ABC 内一点，则

$\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是 ()

- A. -2 B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{4}{3}$ D. -1

【解答】解：建立如图所示的坐标系，以 BC 中点为坐标原点，

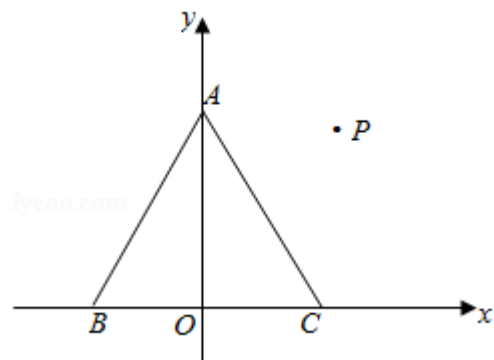
则 $A(0, \sqrt{3})$ ， $B(-1, 0)$ ， $C(1, 0)$ ，

设 $P(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{PA} = (-x, \sqrt{3} - y)$ ， $\overrightarrow{PB} = (-1 - x, -y)$ ， $\overrightarrow{PC} = (1 - x, -y)$ ，

$$\text{则 } \overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = 2x^2 - 2\sqrt{3}y + 2y^2 = 2\left[x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right]$$

$$\therefore \text{当 } x=0, y=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, 取得最小值 } 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{2},$$

故选: B.



5. [2017 全国III卷(理)-T12]在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $AD=2$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与

BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$, 则 $\lambda + \mu$ 的最大值为 ()

A. 3

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. 2

【解答】解: 如图: 以 A 为原点, 以 AB , AD 所在的直线为 x , y 轴建立如图所示的坐标系,

则 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $D(0, 2)$, $C(1, 2)$,

$\because$ 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上,

设圆的半径为 r ,

$\because BC=2$, $CD=1$,

$$\therefore BD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \frac{1}{2}BC \cdot CD = \frac{1}{2}BD \cdot r,$$

$$\therefore r = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore \text{圆的方程为 } (x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{5},$$

设点 P 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta + 1, \frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\theta + 2\right)$,

$$\therefore \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD},$$

$$\therefore \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \theta + 1, \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \theta + 2 \right) = \lambda (1, 0) + \mu (0, 2) = (\lambda, 2\mu),$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \theta + 1 = \lambda, \quad \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin \theta + 2 = 2\mu,$$

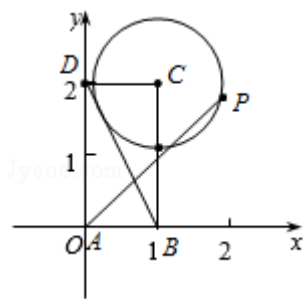
$$\therefore \lambda + \mu = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \theta + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin \theta + 2 = \sin(\theta + \varphi) + 2, \text{ 其中 } \tan \varphi = 2,$$

$$\because -1 \leq \sin(\theta + \varphi) \leq 1,$$

$$\therefore 1 \leq \lambda + \mu \leq 3,$$

故 $\lambda + \mu$ 的最大值为 3,

故选: A.



6. [2017·全国 I 卷(文)-T11] $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$, $a = 2$, $c = \sqrt{2}$, 则 $C =$ ()

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

【解答】解: $\sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$,

$$\therefore \sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0,$$

$$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0,$$

$$\therefore \cos A \sin C + \sin A \sin C = 0,$$

$$\therefore \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = -\sin A,$$

$$\therefore \tan A = -1,$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < A < \pi,$$

$$\therefore A = \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{由正弦定理可得 } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A},$$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

$$\because a = 2, \quad c = \sqrt{2},$$

$$\therefore \sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\because a > c,$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{6},$$

故选: B.

7. [2016 全国 I 卷(理)-T12] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调, 则 ω 的最大值为()

A. 11

B. 9

C. 7

D. 5

【解答】解: $\because x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴,

$$\therefore \frac{2n+1}{4} \cdot T = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } \frac{2n+1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{即 } \omega = 2n+1, \quad (n \in \mathbb{N})$$

即 ω 为正奇数,

$$\because f(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}) \text{ 上单调, 则 } \frac{5\pi}{36} - \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{12} \leq \frac{T}{2},$$

$$\text{即 } T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{6}, \text{ 解得: } \omega \leq 12,$$

$$\text{当 } \omega = 11 \text{ 时, } -\frac{11\pi}{4} + \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\because |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}, \text{ 此时 } f(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}) \text{ 不单调, 不满足题意;}$$

$$\text{当 } \omega = 9 \text{ 时, } -\frac{9\pi}{4} + \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\because |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ 此时 } f(x) \text{ 在 } (\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}) \text{ 单调, 满足题意;}$$

故 ω 的最大值为 9, 故选: B.

8. [2019 年全国Ⅲ卷(理)T12] 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{5})$ ($\omega > 0$), 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$

有且仅有 5 个零点, 下述四个结论:

① $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点

② $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 单调递增

④ ω 的取值范围是 $[\frac{12}{5}, \frac{29}{10})$

其中所有正确结论的编号是

A. ①④

B. ②③

C. ①②③

D. ①③④

【答案】D

【详解】当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{5} \in [\frac{\pi}{5}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{5}]$,

$\because f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, $\therefore 5\pi \leq 2\pi\omega + \frac{\pi}{5} < 6\pi$, $\therefore \frac{12}{5} \leq \omega < \frac{29}{10}$, 故④正确,

由 $5\pi \leq 2\pi\omega + \frac{\pi}{5} < 6\pi$, 知 $\omega x + \frac{\pi}{5} \in [\frac{\pi}{5}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{5}]$ 时, 令 $\omega x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}$ 时取得极

大值, ①正确;

极小值点不确定, 可能是 2 个也可能是 3 个, ②不正确;

因此由选项可知只需判断③是否正确即可得到答案, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{10})$ 时,

$$\omega x + \frac{\pi}{5} \in [\frac{\pi}{5}, \frac{(\omega+2)\pi}{10}],$$

若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 单调递增, 则 $\frac{(\omega+2)\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$, 即 $\omega < 3$, $\therefore \frac{12}{5} \leq \omega < \frac{29}{10}$, 故③正确.

故选 D.