江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学周三练习（5）文科

2018.10.3

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知集合 $A=\{1,2\},B=\{a,a^2+3\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $a=$________.

2．若复数 z 满足 $(2-i)z=1+i$，则复数 z 在复平面上对应的点在第________象限.

3．对于命题 p：$\exists x\in R$，使得 $x^2+x+1<0$．则 $\neg p$ 为：______________.

4．函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(4x-3)}$ 的定义域为____________.

5．设 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，向量 $\vec{a}=(\cos\theta,2),\vec{b}=(-1,\sin\theta)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\tan\theta=$______.

6．$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 C=60°，$b=\sqrt{6}$，c=3，则 A=______.

7．设直线 $y=-3x+b$ 是曲线 $y=x^3-3x^2$ 的一条切线，则实数 b 的值是__________.

8．在平行四边形 ABCD 中，AP⊥BD，垂足为 P，且 AP＝3，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$_______.

9．已知函数 $f(x)$ 在定义域 $[2-a,3]$ 上是偶函数，在 $[0,3]$ 上单调递减，并且

$f(-m^2-\dfrac{a}{5})>f(-m^2+2m-2)$，则 m 的取值范围是______.

10．将函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos(2x+\dfrac{\pi}{3})-1$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $g(x)$ 具有性质______.（填入所有正确性质的序号）

①最大值为 $\sqrt{3}$，图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 对称；②图象关于 y 轴对称；③最小正周期为 π；

④图象关于点 $(\dfrac{\pi}{4},0)$ 对称；⑤在 $(0,\dfrac{\pi}{3})$ 上单调递减.

11．已知圆 $C:x^2+y^2-2ax-2y+2=0$（a 为常数）与直线 $y=x$ 相交于 A,B 两点，若 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$，则实数 $a=$__________.

12．已知△ABC 的面积为 S，且 $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+2S$，则∠B 的值为_______.

13．已知点P是圆$O: x^2+y^2=4$上的动点，点$A(4,0)$，若直线$y=kx+1$上总存在点Q，使点Q恰是线段AP的中点，则实数k的取值范围为______________.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases} kx^2+2x-1, x\in(0,1] \\ kx+1, x\in(1,+\infty) \end{cases}$有两个不相等的零点$x_1, x_2$，则$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$的最大值为________ .

二. 解答题：本大题共6小题，计90分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 已知$\vec{m}=(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$\vec{n}=(\sqrt{3}，-1)$，$\alpha\in(0，\pi)$.

（1）若$\vec{m}\perp\vec{n}$，求角α的值;

（2）求$\left|\vec{m}+\vec{n}\right|$的最小值.

16. 已知ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

（1）求$\cos B$；（2）若$a+c=6$，ΔABC的面积为2，求b.

17. 设p：实数x满足$x^2-4ax+3a^2<0$（其中$a\neq0$），q：实数x满足$\begin{cases} x^2-x-6\le0 \\ x^2+2x-8>0 \end{cases}$

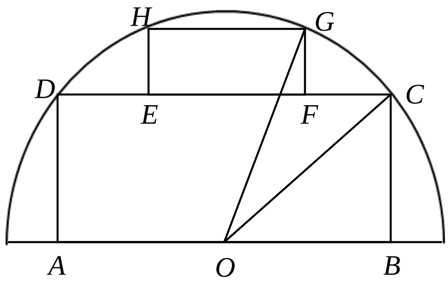
(1)若 $a=1$，且 $p\wedge q$ 为真，求实数 x 的取值范围；

(2)若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围．

18．如图，有一块半圆形空地，开发商计划建一个矩形游泳池 $ABCD$ 及其矩形附属设施 $EFGH$，并将剩余空地进行绿化，园林局要求绿化面积应最大化．其中半圆的圆心为 O，半径为 R，矩形的一边 AB 在直径上，点 C、D、G、H 在圆周上，E、F 在边 CD 上，且 $\angle BOG=\dfrac{\pi}{3}$，设 $\angle BOC=\theta$．

（1）记游泳池及其附属设施的占地面积为 $f(\theta)$，求 $f(\theta)$ 的表达式；

（2）怎样设计才能符合园林局的要求？

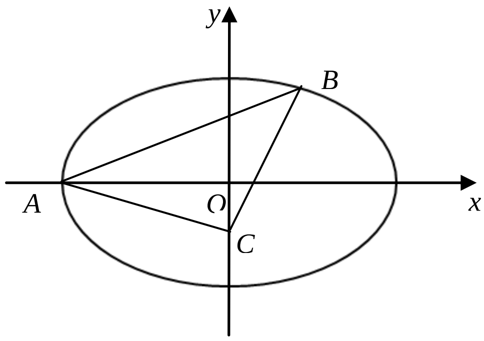


（第 18 题）

19．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A(-2,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，过点 A 的直线 l 与椭圆 E 交于另一点 B，点 C 为 y 轴上的一点.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）若 $\triangle ABC$ 是以点 C 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 l 的方程.



（第 19 题）

20. 已知函数 $f(x)=(ax-1)\mathrm{e}^{x}$（$a\neq 0$，e 是自然对数的底数）.

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上是单调减函数, 求实数 a 的取值范围；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值；

（3）设函数 $f(x)$ 图象上任意一点处的切线为 l，求 l 在 x 轴上的截距的取值范围.

周三练习（5）文科参考答案

1．1　　2．一　　3．$\forall x\in R$，均有 $x^{2}+x+1\geq 0$　　4．$\left\{x\,|\,x>\dfrac{3}{4}\text{且}x\neq 1\right\}$　　5．$\dfrac{1}{2}$　　6．75°

7．1　　8．18　　9．$1-\sqrt{2}\le m<\dfrac{1}{2}$　　10．②③④　　11．-5　　12．$\dfrac{\pi}{4}$　　13．$[-\dfrac{4}{3},0]$

14．$\dfrac{9}{4}$

15. **解:**

(1)因为 $\overrightarrow{m}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{n}=\left(\sqrt{3},-1\right)$, 且 $\overrightarrow{m}\perp\overrightarrow{n}$

所以 $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=0,\ldots(2$ 分 $)$

即 $\tan\alpha=\sqrt{3}$, 又 $\alpha\in(0,\pi),\ldots(4$ 分 $)$

所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{3},\ldots(6$ 分 $)$

(2)因为 $\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}=\left(\cos\alpha+\sqrt{3},\sin\alpha-1\right),\ldots(8$ 分 $)$

所以 $|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|=\sqrt{\left(\cos\alpha+\sqrt{3}\right)^2+(\sin\alpha-1)^2}$

$=\sqrt{5+2\sqrt{3}\cos\alpha-2\sin\alpha}$

$=\sqrt{5+4\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}\ldots(12$分$)$

因为 $\alpha\in(0,\pi)$, 所以 $\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right)$,

故当 $\alpha+\dfrac{\pi}{6}=\pi$ 时，$|\overrightarrow{m}+\overrightarrow{n}|$ 取到最小值 $1\ldots(14$ 分 $)$

16．**解:**（1）$\because\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$，$\therefore\sin B=4(1-\cos B)$，

$\because\sin^2B+\cos^2B=1$，$\therefore16(1-\cos B)^2+\cos^2B=1$，$\therefore16(1-\cos B)^2+\cos^2B-1=0$，

$\therefore16(\cos B-1)^2+(\cos B-1)(\cos B+1)=0$，$\therefore(17\cos B-15)(\cos B-1)=0$，$\therefore\cos B=\frac{15}{17}$;

（2）由（1）可知 $\sin B=\frac{8}{17}$，$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\bullet\sin B=2$，$\therefore ac=\frac{17}{2}$，

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-2\times\frac{17}{2}\times\frac{15}{17}=a^2+c^2-15=(a+c)^2-2ac-15=36-17-15=4$，

$\therefore b=2$．

17．　**解**：(1)当 $a=1$ 时，解得 $1<x<3$，即 p 为真时实数 x 的取值范围是 $1<x<3$. …2 分

由 $\begin{cases}x^2-x-6\le0\\x^2+2x-8>0\end{cases}$，得 $2<x\le3$，即 q 为真时实数 x 的取值范围是 $2<x\le3$. ……………4 分

若 $p\wedge q$ 为真，则 p 真且 q 真，………………5 分

所以实数 x 的取值范围是$(2,3)$．………………7 分

(2)p 是 q 的必要不充分条件，即 $q\Rightarrow p$，且 $p\not\Rightarrow q$，………………8 分

设 $A=\{x|p(x)\}$，$B=\{x|q(x)\}$，则 $A\subseteq B$，又 $B=(2,3]$，

由 $x^2-4ax+3a^2<0$ 得 $(x-3a)(x-a)<0$，…………………9 分

当 $a>0$ 时，$A=(a,3a)$，有 $\begin{cases} a\le 2 \\ 3<3a \end{cases}$，解得 $1<a\le 2$；…………………11 分

当 $a<0$ 时，$A=(3a,a)$，显然 $A\cap B=\varnothing$，不合题意．…………………13 分

所以实数 a 的取值范围是 $(1,2]$．…………………14 分

18. **解:**（1）由题意，$AB=2R\cos\theta$，$BC=R\sin\theta$，且 $\triangle HOG$ 为等边三角形，

所以，$HG=R$，$EH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R-R\sin\theta$，…………………3 分

$f(\theta)=S_{ABCD}+S_{EFGH}$

$=2R\cos\theta\cdot R\sin\theta+R(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R-R\sin\theta)$

$=R^2(2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{3})$．…………………8 分

（2）要符合园林局的要求，只要 $f(\theta)$ 最小，

由（1）知，$f'(\theta)=R^2(2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-\cos\theta)=R^2(4\cos^2\theta-\cos\theta-2)$

令 $f'(\theta)=0$，即 $4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$，

解得 $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$ 或 $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$（舍去），…………………12 分

令 $\cos\theta_0=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$，$\theta_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

当 $\theta\in(0,\theta_0)$ 时，$f'(\theta)<0$，$f(\theta)$ 是单调减函数，

当 $\theta\in(\theta_0,\dfrac{\pi}{3})$ 时，$f'(\theta)>0$，$f(\theta)$ 是单调增函数，

所以当 $\theta=\theta_0$ 时，$f(\theta)$ 取得最小值.

答：当 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$ 时，符合园林局要求.…………………16 分

19.**解:**（1）由题意可得：$\begin{cases} a=2 \\ e=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，即 $\begin{cases} a=2 \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$，

从而有 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 E 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．…………………4 分

（2）设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

因为 $x=-2$ 为该方程的一个根，解得 $B(\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2},\dfrac{12k}{3+4k^2})$，…………………6 分

设 $C(0,y_0)$，由 $k_{AC}\cdot k_{BC}=-1$，得：$\dfrac{y_0}{2}\cdot\dfrac{\dfrac{12k}{3+4k^2}-y_0}{\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2}}=-1$，

即：$(3+4k^2)y_0{}^2-12ky_0+(16k^2-12)=0\quad(*)$ ……………………………………………………10 分

由 $AC=BC$,即 $AC^2=BC^2$，得 $4+y_0{}^2=(\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2})^2+(y_0-\dfrac{12k}{3+4k^2})^2$，

即 $4=(\dfrac{6-8k^2}{3+4k^2})^2+(\dfrac{12k}{3+4k^2})^2-\dfrac{24k}{3+4k^2}y_0$，

即 $4(3+4k^2)^2=(6-8k^2)^2+144k^2-24k(3+4k^2)y_0$，

所以 $k=0$ 或 $y_0=\dfrac{-2k}{3+4k^2}$， ……………………………………………………………………14 分

当 $k=0$ 时，直线 l 的方程为 $y=0$，

当 $y_0=\dfrac{-2k}{3+4k^2}$ 时，代入 $(*)$ 得 $16k^4+7k^2-9=0$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{4}$，

此时直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{3}{4}(x+2)$.

综上,直线 l 的方程为 $y=0$， $y=\pm\dfrac{3}{4}(x+2)$. ……………………………………………………16 分

20.**解：**（1）函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=(ax-1+a)\mathrm{e}^x$，

则 $f'(x)\leqslant 0$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立，且等号不恒成立，

又 $\mathrm{e}^x>0$，所以 $ax-1+a\leqslant 0$ 在区间 $[1,2]$ 上恒成立， ………………………………………2 分

记 $g(x)=ax-1+a$，只需 $\begin{cases}g(1)\leqslant 0\\ g(2)\leqslant 0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}2a-1\leqslant 0\\ 3a-1\leqslant 0\end{cases}$，解得 $a\leqslant\dfrac{1}{3}$. ………………4 分

（2）由 $f'(x)=(ax-1+a)\mathrm{e}^x=0$，得 $x=\dfrac{1-a}{a}$ ，

①当 $a<0$ 时，有 $x\in(-\infty,\dfrac{1-a}{a}),\ f'(x)>0$； $x\in(\dfrac{1-a}{a},+\infty),\ f'(x)<0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,\dfrac{1-a}{a})$ 单调递增， $x\in(\dfrac{1-a}{a},+\infty)$ 单调递减，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1-a}{a}$ 取得极大值 $-a\cdot e^{\frac{1-a}{a}}$，没有极小值.

②当 $a>0$ 时，有 $x\in(-\infty,\dfrac{1-a}{a}),\ f'(x)<0$； $x\in(\dfrac{1-a}{a},+\infty),\ f'(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,\dfrac{1-a}{a})$ 单调递减， $x\in(\dfrac{1-a}{a},+\infty)$ 单调递增，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1-a}{a}$ 取得极小值 $-a\cdot e^{\frac{1-a}{a}}$，没有极大值.

综上可知: 当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1-a}{a}$ 取得极大值 $-a\cdot e^{\frac{1-a}{a}}$，没有极小值；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1-a}{a}$ 取得极小值 $-a\cdot e^{\frac{1-a}{a}}$，没有极大值.

……10 分

（3）设切点为 $T(t,(at-1)e^t)$，

则曲线在点 T 处的切线 l 方程为 $y-(at-1)e^t=(at-1+a)(x-t)e^t$，

当 $t=\dfrac{1-a}{a}$ 时，切线 l 的方程为 $y=(at-1)\mathrm{e}^t=-a\cdot\mathrm{e}^{\frac{1-a}{a}}$，其在 x 轴上的截距不存在.

当 $t\neq\frac{1-a}{a}$ 时，令 $y=0$，得切线 l 在 x 轴上的截距为

$$x=t-\frac{at-1}{at-1+a}=t-\frac{(at-1+a)-a}{at-1+a}=t-1+\frac{a}{at-1+a}=t-1+\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}$$

$=t-\frac{1}{a}+1+\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}-2+\frac{1}{a}$，……………………………………………………………………12 分

当 $t-\frac{1}{a}+1>0$ 时，

$$x=t-\frac{1}{a}+1+\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}-2+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{(t-\frac{1}{a}+1)\cdot\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}}-2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a},$$

当且仅当 $t-\frac{1}{a}+1=\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}$，即 $t=\frac{1}{a}$ 或 $t=\frac{1}{a}-2$ 时取等号；…………………………14 分

当 $t-\frac{1}{a}+1<0$ 时，

$$x=t-\frac{1}{a}+1+\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}-2+\frac{1}{a}\leqslant -2\sqrt{[-(t-\frac{1}{a}+1)]\cdot\frac{1}{-(t-\frac{1}{a}+1)}}-2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-4,$$

当且仅当 $t-\frac{1}{a}+1=\frac{1}{t-\frac{1}{a}+1}$，即 $t=\frac{1}{a}$ 或 $t=\frac{1}{a}-2$ 时取等号.

所以切线 l 在 x 轴上的截距范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{a}-4\right]\cup\left[\frac{1}{a},+\infty\right)$. ………………………………16 分