数列满分练参考答案

1. **解** (1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$a_3=a_1+2d=6$,

$S_4=4a_1+\frac{4\times3}{2}d=20$,

解得$a_1=2,d=2$,

$\therefore a_n=2+(n-1)\times2=2n$.

(2)由题意得$a_k^2=a_1S_{k+2}$,

$\because a_k=2k,S_{k+2}=(k+2)\times2+\frac{(k+2)(k+1)}{2}\times2=(k+2)(k+3)$,

$\therefore 2(k+2)(k+3)=(2k)^2,k\in\mathbf{N}^*$,

即$k^2-5k-6=0$,

$\therefore k=6$或$k=-1$(舍去),

$\therefore k=6$.

2. **解** 选①,由已知$S_{n+1}=4S_n+2$ (1),

当$n\geqslant2$时,$S_n=4S_{n-1}+2$ (2),

(1)−(2)得,$a_{n+1}=4(S_n-S_{n-1})=4a_n$,

即$a_{n+1}=4a_n$,

当$n=1$时,$S_2=4S_1+2$,

即$2+a_2=4\times2+2$,

所以$a_2=8$,满足$a_2=4a_1$,

故$\{a_n\}$是以2为首项、4为公比的等比数列,所以$a_n=2^{2n-1}$.

$b_n=\log_2a_1+\log_2a_2+\cdots+\log_2a_n=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$,

$c_n=\frac{n^2+n}{b_nb_{n+1}}=\frac{n(n+1)}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

所以$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

选②,由已知$3S_n=2^{2n+1}+\lambda$ (1),

当$n\geqslant2$时,$3S_{n-1}=2^{2n-1}+\lambda$ (2),

(1)−(2)得,$3a_n=2^{2n+1}-2^{2n-1}=3\cdot2^{2n-1}$,即$a_n=2^{2n-1}$,

当$n=1$时,$a_1=2$满足$a_n=2^{2n-1}$,

下同选①.

选③,由已知$3S_n=a_{n+1}-2$ (1),

当$n\geqslant2$时,$3S_{n-1}=a_n-2$ (2),

(1)−(2)得$3a_n=a_{n+1}-a_n$,即$a_{n+1}=4a_n$,

当$n=1$时,$3a_1=a_2-2$,而$a_1=2$,得$a_2=8$,满足$\frac{a_2}{a_1}=4$,

故$\{a_n\}$是以2为首项、4为公比的等比数列,所以$a_n=2^{2n-1}$.

下同选①.

3. **解** (1)因为$a_{n+1}=a_n+2$,所以$a_{n+1}-a_n=2$,所以$\{a_n\}$是等差数列.

又$a_1=1$,所以$a_n=2n-1$,从而$S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

(2)因为$a_n=2n-1$,所以$3b_1+5b_2+7b_3+\cdots+(2n+1)b_n=2^n\cdot(2n-1)+1$, ①

当$n\geqslant2$时,$3b_1+5b_2+7b_3+\cdots+(2n-1)b_{n-1}=2^{n-1}\cdot(2n-3)+1$. ②

①−②可得$(2n+1)b_n=2^{n-1}\cdot(2n+1)(n\geqslant2)$,即$b_n=2^{n-1}$.

而$b_1=1$也满足上式,故$b_n=2^{n-1}$.

令$b_n\geqslant8S_n$,则$2^{n-1}\geqslant8n^2$,即$2^{n-4}\geqslant n^2$.

又$2^{10-4}<10^2,2^{11-4}>11^2$,结合指数函数的性质,可知整数$k$的最小值是11.

4. **解** $\because a_2=2,a_5=16,\therefore q^3=\frac{16}{2}=2^3,\therefore q=2$,

$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=2^{n-1}$.

若选①,$\because q+d=0,a_3=b_3$,

$\therefore d=-q=-2,b_3=2^2=4$,

$\therefore b_n=b_3-2(n-3)=10-2n,b_1=8$,

$\therefore S_n=\frac{(8+10-2n)n}{2}=\frac{81}{4}-\left(n-\frac{9}{2}\right)^2$,

$\therefore$当$n=4$或$n=5$时,S_n取得最大值,为$S_4=S_5=20$.

若$\lambda S_n\leqslant50$,则$\frac{50}{\lambda}\geqslant(S_n)_{\max}=20$,又$\lambda\in\mathbf{N}^*$,$\therefore\lambda=1$或2.

若选②,$\because a_4+b_7=0,a_3=b_3$,

$\therefore b_7=-a_4=-8,b_3=4,\therefore d=\frac{-8-4}{4}=-3$,

$\therefore b_n=b_7-3(n-7)=13-3n,b_1=10$,

由$b_n\geqslant0$得$n\leqslant4$,

$\therefore$当$n=4$时,S_n取得最大值,为$S_4=\frac{10+13-3\times4}{2}\times4=22$.

若$\lambda S_n\leqslant50$,则$\frac{50}{\lambda}\geqslant(S_n)_{\max}=22$,又$\lambda\in\mathbf{N}^*$,$\therefore\lambda=1$或2.

若选③,$\because S_3=9,\therefore 3b_2=9,b_2=3$,

$\because a_3=b_3,\therefore b_3=4,\therefore d=1$,

$\therefore b_n=b_2+(n-2)=n+1$.

$\because$等差数列$\{b_n\}$递增,

$\therefore S_n$无最大值,$\therefore$不存在正整数λ,使得$\lambda S_n\leqslant50$.

5. **解** 设数列$\{a_n\}$的公差为d,$\{b_n\}$的公比为$q(q>0)$,

因为$\{b_n\}$是公比大于0的等比数列,且$b_1=1,b_3=b_2+2$,

所以$q^2=q+2$,解得$q=2$($q=-1$不合题意,舍去).所以$b_n=2^{n-1}$.

若存在k,使得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有$c_k\leqslant c_n$,则c_n存在最小值.

若选①,则由$b_5=a_4+2a_6,b_4=a_3+a_5$可得$\begin{cases}3a_1+13d=16,\\2a_1+6d=8,\end{cases}$得$d=1,a_1=1$,

所以$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,c_n=\frac{b_2}{S_n}=\frac{2}{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}=\frac{4}{n^2+n}$.

因为$n\in\mathbf{N}^*$,所以$n^2+n\geqslant2$,所以c_n不存在最小值,

即不存在满足题意的k.

若选②,由$b_5=a_4+2a_6,b_4+b_6=3a_3+3a_5$可得$\begin{cases}3a_1+13d=16,\\6a_1+18d=40,\end{cases}$得$d=-1,a_1=\frac{29}{3}$,

所以$S_n=-\frac{1}{2}n^2+\frac{61}{6}n,c_n=\frac{b_2}{S_n}=\frac{12}{-3n^2+61n}$.

因为当$n\leqslant20$时,$c_n>0$,当$n\geqslant21$时,$c_n<0$,

所以易知c_n的最小值为$c_{21}=-\frac{2}{7}$.

即存在$k=21$,使得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有$c_k\leqslant c_n$.

若选③,则由$b_5=a_4+2a_6,a_2+a_3=b_4$可得$\begin{cases}3a_1+13d=16,\\2a_1+3d=8,\end{cases}$得$d=\frac{8}{17},a_1=\frac{56}{17}$,

所以$S_n=\frac{4n^2+52n}{17},c_n=\frac{b_2}{S_n}=\frac{17}{2n^2+26n}$.

因为$2n^2+26n\geqslant28$,所以c_n不存在最小值,

即不存在满足题意的k.

6. **解** (1)因为$S_2=a_1+a_2=3a_1$,所以$a_2=2a_1$,

所以数列$\{a_n\}$的公比$q=\frac{a_2}{a_1}=2$,

因为$S_4=\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=15a_1=15$,所以$a_1=1$,

所以$a_n=2^{n-1},S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$.

(2)结合(1)得$\frac{S_{2n}}{a_{n+1}}=\frac{2^{2n}-1}{2^n}=2^n-\frac{1}{2^n}$,

所以$T_n=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-\frac{\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2^{n+1}+\frac{1}{2^n}-3$,

因为$T_n>\frac{33}{2^n}-3$, 所以$2^{n+1}+\frac{1}{2^n}-3>\frac{33}{2^n}-3$,

所以$2^{2n+1}>2^5$,

故正整数n的取值范围为$\{n|n>2$且$n\in\mathbf{N}^*\}$.

7. (1)**解** 因为$f(x)=(a_{n+2}-a_{n+1})x-(a_n-a_{n+1})\sin x+a_n\cos x$,

所以$f'(x)=a_{n+2}-a_{n+1}-(a_n-a_{n+1})\cos x-a_n\sin x$.

又$f'(\pi)=0$,所以$f'(\pi)=a_{n+2}-a_{n+1}+a_n-a_{n+1}=0$,

即$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$,因此$\{a_n\}$是以1为首项的等差数列.

设数列$\{a_n\}$的公差为d,则$d>0$,

因为a_1,a_2,a_5成等比数列,所以$a_2^2=a_1\cdot a_5$,

即$(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$,解得$d=2$,所以$a_n=2n-1$.

(2)**证明** 由(1)可得$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=n^2$,

所以$b_n=\frac{1}{n^2}$,因此$T_1=b_1=1<2$.

又因为当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$，故 $T_n<2$.

8.**解** (1)若选①，则由已知得 $(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=3(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，即 $a_{n+1}-a_n=3(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

又 $a_2-a_1=3$，

∴数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项、3 为公差的等差数列，

∴$a_n=2+3(n-1)=3n-1$.

若选②，则由 $S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}-a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，

可得 $S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})-a_{n-1}$，

即 $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}$，

即 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

∴数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，

又 $a_2-a_1=3$，

∴数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项、3 为公差的等差数列.

故 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$.

若选③，由 $\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{3}{2}(n\geqslant 2)$ 可得，数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是一个公差为 $\frac{3}{2}$ 的等差数列，

又 $\frac{S_1}{1}=a_1=2$，∴$\frac{S_n}{n}=2+\frac{3}{2}(n-1)=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$，

∴$S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)-\left[\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]=3n-1$.

当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也适合上式.

综上，$a_n=3n-1$.

(2)∵b_n 是 a_n,a_{n+1} 的等比中项，

∴$b_n^2=a_na_{n+1}=(3n-1)[3(n+1)-1]=(3n-1)(3n+2)$.

故 $\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$，

$T_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{n}{2(3n+2)}$.

9.**解** **法一** 选择① 因为 $a_3=12$，所以 $a_1=3$，

所以 $S_n=\frac{3(1-2^n)}{1-2}=3(2^n-1)$.

令 $S_k>2\,020$，即 $3(2^k-1)>2\,020$，得 $2^k>\frac{2\,023}{3}$.

所以存在正整数 k，使得 $S_k>2\,020$，k 的最小值为 10.

法二 选择② 因为 $a_3=12$，所以 $a_1=48$，

所以 $S_n=\frac{48\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=96\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

因为 $S_n<96<2\,020$，所以不存在满足条件的正整数 k.

法三 选择③ 因为 $a_3=12$，所以 $a_1=3$，

所以 $S_n=\frac{3\times[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=1-(-2)^n$.

令 $S_k>2\,020$，即 $1-(-2)^k>2\,020$，整理得 $(-2)^k<-2\,019$.

当 k 为偶数时，原不等式无解；

当 k 为奇数时，原不等式等价于 $2^k>2\,019$，

所以存在正整数 k，使得 $S_k>2\,020$，k 的最小值为 11.

10.**解** (1)因为 $4S_n=(a_n+1)^2$，

所以当 $n=1$ 时，$4a_1=4S_1=(a_1+1)^2$，解得 $a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$，

又 $4S_n=(a_n+1)^2$，

所以两式相减得 $4a_n=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$，

可得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，

因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=2n-1$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

(2)若选条件①，$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

则 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

若选条件②，$b_n=3^n\cdot a_n=3^n\cdot(2n-1)$，

则 $T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^n$，

上式两边同时乘 3，可得 $3T_n=1\times 3^2+3\times 3^3+5\times 3^4+\cdots+(2n-1)\times 3^{n+1}$，

两式相减得 $-2T_n=3+2\times(3^2+3^3+\cdots+3^n)-(2n-1)\times 3^{n+1}=-6+(2-2n)\cdot 3^{n+1}$，可得 $T_n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$.

若选条件③，

由 $a_n=2n-1$ 可得 $S_n=\frac{(1+2n-1)\times n}{2}=n^2$，

所以 $b_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

故 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$.

11.**解** 若选条件①，

由 $n\geqslant 2$ 时，$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_{n-1}}+1$，得数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 1 的等差数列，

又 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$，所以 $\sqrt{S_n}=n$，所以 $S_n=n^2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$.

若选条件②，

由 $a_n^2+2a_n=4S_n-1$，得 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}=4S_{n+1}-1$，

两式相减，得 $a_{n+1}^2-a_n^2+2a_{n+1}-2a_n=4a_{n+1}$，

即 $(a_{n+1}-a_n-2)(a_{n+1}+a_n)=0$，

因为数列 $\{a_n\}$ 为正数数列，所以 $a_{n+1}+a_n>0$，所以 $a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，

所以 $a_n=2n-1$.

所以 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$.

若选条件③，

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 $\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=2$，得 $\frac{12a_1+\frac{12\times 11}{2}d}{12}-\frac{10a_1+\frac{10\times 9}{2}d}{10}=2$，

解得 $d=2$. 所以 $a_n=2n-1$.

所以 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$.