通过探究性学习发展学生向量应用意识[①]

朱胜强

（南京外国语学校　210008）

1　问题的提出

向量是近代数学中重要和基本的概念之一，它既是代数研究的对象，也是几何研究的对象，是沟通几何与代数的桥梁. 自 1996 年进入高中数学课程以来，向量已成为高中数学的重要内容. 为充分发挥向量的工具作用，2003 年颁布的《普通高中数学课程标准（实验）》将平面向量与三角函数设计在一个模块中.《普通高中数学课程标准（2017 年版）》则将相应内容纳入必修课程的主题三，名称上调整为“平面向量及其应用”，进一步强调了向量的工具作用.

然而，从多年教学实践所反映的情况看，学生对向量工具作用的认识似乎未达预期. 在学习了平面向量之后，学生并没有具备良好的用向量工具解决问题的意识. 在后续学习中，有许多可让向量发挥作用的时机，如两角差的余弦公式的推导，解析几何中直线与圆的方程的推导及多种解几公式的推导，正、余弦定理的推导等等，课堂上每遇这些内容的教学（包括一些公开教学活动），任凭教师暗示、点拨，学生就是想不到向量，所学向量似乎仅限于在考试中取得相应的分数，这当然不是向量教学的目的所在. 提高学生对向量工具作用的认识，增强思考问题时自觉运用向量工具的意识，应是向量教学中需要关注的问题.

回观向量教学，以苏教版教材为例，在介绍向量概念及其运算的同时，也渗透了向量的各种应用. 既有物理背景的，也有平面几何、解析几何背景的. 最后，还专门有一小节介绍向量的应用. 但由于课时所限，如配套的教学参考书中，对平面向量一章的建议课时是 12 课时. 学习过程中，学生的主要精力会集中在熟悉向量的各种运算上. 等到对向量全貌有了基本认识后，却又要开始新章节内容的学习. 因此，学生的向量应用意识的淡薄也就不足为怪了.

要巩固向量教学的效果，让学生感受到向量有用，自然可以在后续学习中有意识地搭建新知识与向量联系的桥梁. 不过，这样做带有较大的随意性. 除此之外，也可趁热打铁，在学生掌握了基本的向量知识之后，引导学生开展探究性学习活动，让他们在原有基础上及时获得更深刻的体验.

2　探究问题的设计

注意到向量兼具代数与几何双重属性，平面几何又是学生具备一定的基础，且是许多学生比较感兴趣的内容. 因此，在内容的选择上，可考虑以平面几何问题为研究载体. 虽然某些平面几何知识可能已淡忘，但对一些典型问题学生仍会留有印象. 比如，在向量章节例、习题中涉及三角形重心、垂心、外心等问题时，学生不仅未感到陌生，而且觉得比其它问题更有趣. 所以，从向量的角度对三角形的“四心”进行研究，既可顾及学生的现有基础，契合他们的兴趣爱好，也是对向量应用的一种自然地拓展延伸.

学生只有切实感受到向量工具的长处，才能提高应用的自觉性. 初中平面几何属于欧氏几何，解决问题时只依据基本的逻辑原理（同一律、矛盾律、排中律等），从基本事实（公理）出发，通过演绎推理，建立几何关系. 因此，它给出的几何论证十分严谨，但往往无规律可循，存在较大思考难度. 用向量工具研究几何问题，则是建立了向量运算（运算律）与几何图形之间的关系，对图形的研究

① 本文系江苏省教育科学“十三五”规划课题——通过微型探究培养学生数学核心素养的实践研究（B—b/2018/02/78）研究成果；江苏省教育科学“十二五”规划课题——高中数学课堂实现教学目标的问题驱动策略研究（B—b/2015/02/261）后续研究成果；

借助代数运算来实现.

向量工具解决问题的第一个优点是所依据的定理法则少.高中阶段,向量法解决问题的基本法则只有4点:

法则1 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.这个法则可以推广到多个向量,用来写出许多向量等式;

法则2 向量数乘的意义和运算律,特别是可以用数乘一个向量来表示和它平行或共线的向量;

法则3 向量的内积(数量积)的意义和运算律,特别是互相垂直向量的内积为0;

法则4 平面向量基本定理:如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是平面内两个不共线的向量,则对平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$,存在唯一的实数对 λ_1,λ_2,使得 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

向量工具解决问题的第二个优点是思考方式有章可循.用向量方法解决平面几何问题,通常遵循如下"三步曲":

(1)建立平面几何与向量的联系,用向量表示问题中涉及的几何元素,将平面几何问题转化为向量问题;

(2)通过向量运算研究几何元素之间的关系,如距离、夹角等问题;

(3)把运算结果"翻译"成几何关系.

从学生的角度看,向量的线性运算、数量积运算及平面向量基本定理都是他们已经掌握了的.解决平几问题"三步曲"中,学生最擅长的是第二步,向量运算.较为困难的是第一步,即用向量表示几何元素.因此,在进行探究问题设计时,应着力于学生的薄弱环节.

由此,考虑到了将探究问题设计侧重于用向量表示三角形的四心,进而提出如下问题:

在$\triangle ABC$中,记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,试以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为基底,表示以 C 为起点,$\triangle ABC$ 的重心、垂心、内心、外心分别为终点的向量.

3 探究过程与结果

设计的探究问题在进行"向量的应用"教学时给出,供学生课外研究.学生可以自由组合,也可以独立研究.可以选择三角形"四心"中的某一个心,也可以对所"四心"展开思考.约定好时间在班级数学学习群中交流探究成果.

问题给出后,学生意识到,依据平面向量基本定理,与三角形四个心所对应的向量应该能用基底表示.但具体怎么表示?都觉得问题并不像教材例、习题中类似问题那样简单,有一定的挑战性.

探究的过程中,有些学生遇到难以逾越的障碍,教师给予适当的指点,并提出一些建议.在截止时间到来的时候,参与探究的学生公布了各自研究的成果.

最后,学生推举出了几位代表对集体探究成果做进一步加工、整理,形成了如下大家认可的探究结论.

3.1 重心的向量表示

如图1,已知$\triangle ABC$的两条中线 AD,BE 的交点为 G.记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{CG}$.

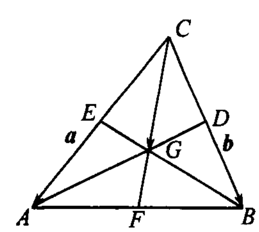

图1

设$\overrightarrow{CG}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,因为 D 是 CB 中点,

所以$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,同理$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

因为 G 是 AD,BE 的交点,

所以$\overrightarrow{AG}$,$\overrightarrow{DA}$共线,$\overrightarrow{BG}$,$\overrightarrow{BE}$共线.

由 $\overrightarrow{AG}=(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{BG}=m\boldsymbol{a}+(n-1)\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,

得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}(m-1)=n,\\ -m=\frac{1}{2}(n-1).\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=\frac{1}{3},\\ n=\frac{1}{3}.\end{cases}$ 由此可得$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

设 F 为 AB 的中点,考虑到$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,所以$\overrightarrow{CG}$与$\overrightarrow{CF}$共线.即$\triangle ABC$的三条中线交于一点 G.

3.2 垂心的向量表示

如图2,已知$\triangle ABC$的两条高线 AD,BE 的交点为 H.记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{CH}$.

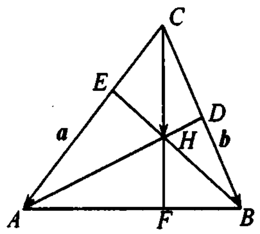

图 2

设$\overrightarrow{CH}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,则

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CA}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

$=(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CH}-\overrightarrow{CB}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}$

$=m\boldsymbol{a}+(n-1)\boldsymbol{b}$.

因为 $AH\perp CB$,$BH\perp AC$,

所以$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$,

故有$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$, $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

即$\begin{cases}[(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{b}=0,\\ [m\boldsymbol{a}+(n-1)\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a}=0.\end{cases}$

化简得 $\begin{cases}m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\\ m\boldsymbol{a}^2+n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.\end{cases}$

这是一个关于 m,n 的二元一次方程组,可解得

$$\begin{cases}m=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2},\\ n=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}.\end{cases}$$

故$\overrightarrow{CH}=\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{a}+\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\boldsymbol{b}$.

可以看出,

$\overrightarrow{CH}$与向量$(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$ 共线.

又$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,下面说明$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$.

为此考虑

$[(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}]\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于

$[(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}]\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=$
$(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2)+(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
$=0$,

即向量$(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}$ 与$\overrightarrow{AB}$垂直,

所以$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$. 因此,$\triangle ABC$ 的三条高线交于一点 H.

3.3 内心的向量表示

如图 3,已知$\triangle ABC$ 的两条角平分线 AD, BE 的交点为 I. 记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{CI}$.

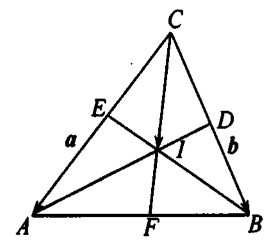

图 3

设$\overrightarrow{CI}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,则

$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CA}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$

$=(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$.

又向量$\overrightarrow{AD}$与向量$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}+\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$即与$-\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|)}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$共线,

由于$-\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

$=-\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\right)\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{b}$.

由向量共线定理可得

$$(m-1)\frac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}-n\left(\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\right)=0,$$

即 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}m-\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\right)n=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}$;

同理

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CB}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}+(n-1)\boldsymbol{b}$.

又向量$\overrightarrow{BE}$与向量$\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}+\dfrac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}$即与$-\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$共线,

由于$-\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

$=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}-(\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|})\boldsymbol{b}$,

所以由向量共线定理可得

$$-(\frac{1}{|\boldsymbol{b}|}+\frac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|})m+\frac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}(n-1)=0,$$

即 $-(\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|})m+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}n=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}$.

考虑关于 m,n 的二元一次方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}m-\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\right)n=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|},\\ -\left(\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}\right)m+\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}n=\dfrac{1}{|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|}.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m=\dfrac{|b|}{|a|+|b|+|b-a|}, \\ n=\dfrac{|a|}{|a|+|b|+|b-a|}. \end{cases}$

所以

$$\overrightarrow{CI}=\frac{|b|}{|a|+|b|+|b-a|}a+\frac{|a|}{|a|+|b|+|b-a|}b.$$

易知，$\overrightarrow{CI}$与向量$\dfrac{1}{|a|}a+\dfrac{1}{|b|}b$共线，

即 CI 是$\angle C$ 的平分线.

所以，三角形三条角平分线交于一点.

3.4 外心的向量表示

如图4，已知$\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O，记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{CO}$.

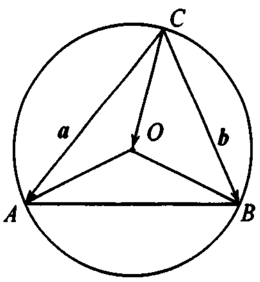

图4

设$\overrightarrow{CO}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$，则

$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}+(n-1)\boldsymbol{b}$.

因为 O 为$\triangle ABC$ 的外心，设外接圆半径为 r，

所以有 $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{CO}|=r$.

所以 $|(m-1)\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}|=r$；

$|m\boldsymbol{a}+(n-1)\boldsymbol{b}|=r$；$|m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}|=r$.

将上面三式两边分别平方，可得

$$(m-1)^2\boldsymbol{a}^2+2(m-1)n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+n^2\boldsymbol{b}^2=r^2;\quad ①$$

$$m^2\boldsymbol{a}^2+2m(n-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(n-1)^2\boldsymbol{b}^2=r^2;\quad ②$$

$$m^2\boldsymbol{a}^2+2mn\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+n^2\boldsymbol{b}^2=r^2.\quad ③$$

③－①得 $(2m-1)\boldsymbol{a}^2+2n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

③－②得 $2m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(2n-1)\boldsymbol{b}^2=0$.

得关于 m,n 的二元一次方程组

$$\begin{cases} m\boldsymbol{a}^2+n\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2, \\ m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+n\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} m=\dfrac{\boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{2[\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]}, \\ n=\dfrac{\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{2\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]}. \end{cases}$

所以

$$\overrightarrow{CO}=\frac{\boldsymbol{b}^2(\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{2[\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]}\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{2\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]}\boldsymbol{b}.$$

4 探究成果的再应用

开展本次探究性学习的目的在于发展学生的向量应用意识，因此，获得探究结论并不是活动的终极目标. 对结果与结果产生的过程进行再思考，有利于进一步深化学生对于向量工具作用的认识.

从获得的探究结果看，三角形的每个心所对应的向量确实都能用给定的基底表示，尽管有些结果获得的过程需经过一定量的运算，但这些运算的思路都是明确的. 这可从一定层度上消除学生对于平面向量基本定理的神秘感. 认为定理只是理论上可行，实践上怎么操作并不清楚. 会用基底表示向量，便开启了向量工具应用之门，可有效提升学生利用向量工具的自信心.

从解决问题的过程看，所涉及的向量知识只局限于线性运算、数量积运算及相应的运算律，平面向量基本定理. 且对于三角形不同的心，解决问题的思路也基本一致.

(1)将三角形某心对应的向量用基底线性表示，其中带有待定的参数；

(2)利用三角形某心的几何特征，得到关于参数的方程组. 这里的几何特征主要是三点共线、互相垂直、角的相等、距离相等这些最基本的、简单的几何关系；

(3)解方程组，求出参数，实现将三角形某心对应的向量用基底表示.

在用基底表示出重心、垂心、外心后，还顺便用向量法验证了这些心分别是三角形的三条中心、高线、角平分线的交点. 所涉及的向量知识依旧是向量共线、向量垂直等简单知识. 从向量应用的角度对探究过程进行剖析，可以让学生切实体会到用向量在解决问题过程中的优势所在.

上述探究活动也可以作为深入开展探究性学习的新起点. 当三角形的"四心"用基底表示后，可以很方便地研究一些与"四心"有关的问题，也可能激发学生主动提出一些新的问题.

比如，教材中曾给出关于$\triangle ABC$ 重心 G 的向量等式$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$. 当时许多学生十分好

（下转第51页）

的",研究的套路都是相同的,只不过所研究的函数类型不同.这样做可以让学生从相互联系中深化知识的理解,掌握三类不同函数的变化趋势和变化规律及其适用的变化过程,便于学生在选择适当的函数模型研究变化过程中运用自如.

4.2 一般观念引领,注重从内容中提炼数学思想和方法

章建跃博士指出,一般观念指的是对内容及其反映的数学思想和方法的进一步提炼和概括,是对数学对象的定义方式、性质指什么、怎样研究等问题的一般性回答,是研究数学对象的方法论,对学生学会用数学的方式对事物进行观察、思考、分析以及发现和提出数学问题等都具有指路明灯的作用.本节课的教学中特别注意体现"一般观念"的指导作用,"回顾"阶段,创设类比情境,回顾三类函数的相关知识及研究套路;"整理"阶段,把三类函数的定义、图象、性质进行比较,理解这三种函数变化模式的区别与共性,从而对"一类函数是怎样定义的""函数图象有什么用"、"函数性质指什么"等问题给出一般性的回答,在此基础上概括"一类函数是如何研究的,研究的思路、内容、方法分别是什么".这样,通过分层次的概括,帮助学生理解函数性质的本质,形成研究的一般思路,提炼与内容融合的数形结合、分类讨论等思想方法,并明确这些思想方法是在哪些环节运用以及如何使用,从而有效积累数学活动经验.

4.3 设计挑战性问题,促进知识和经验的迁移

知识的巩固是需要训练的,但不同的训练方式对学生的思维发展有不同的效果.如前所述,"点对点"的题型训练不仅加重学生不必要的学习负担,而且对学生的思维发展没有多大价值.本课采用研究性的作业来帮助学生巩固知识,促进知识经验的远迁移.在"迁移"阶段,让学生用概括出数学思想与方法独立研究新函数 $y=\frac{k}{x+b}$(b,k 是常数,$k\neq0$).在这类函数的研究过程中,除了需要在一般观念指导下,明确其性质指什么,提出研究的内容和目标,构建研究的整体思路外,还需要类比反比例函数及其性质、一次函数及二次函数中图象的平移,规划研究方案:遵循从特殊到一般的研究思路,先对 k 进行分类,再在不同的类别中选择具体函数(对 k,b 进行具体取值),画出图象,观察图象的特征,并借助坐标中介转化为变量的变化规律和变化趋势得到具体性质,最后通过分层次的归纳推广到一般,得到这类函数性质的一般规律(关键参数如何影响函数的增减性).

学生在这样的复习过程中,不只是知识的简单提取与套用,而是需要用已有的知识和经验研究新问题,从而形成有效的深度学习,保证了复习过程中数学思维的含金量;学生在这样的过程中获得的知识经验是可迁移的,所形成的是真正意义上的数学活动经验;学生在这样的过程中,可以结合知识理解的深入而深刻体会内容蕴含的数学思想与方法,形成研究问题的一般套路,并发展有逻辑、创造性的思考能力。所以,整体观指导下的单元复习是提升学生数学素养的有效举措.

参考文献

[1] 吴增生等.科学用脑高效复习——初中数学总复习教学设计[M].杭州:浙江科技出版社,2018,12
[2] 吴增生.用数学发展智慧——基于脑、适于脑、发展脑的数学教学策略[M].南昌:江西教育出版社,2016,2

(上接第46页)

奇,这么简洁的关系式是怎么想到了.当实现了重心用基底表示后,只要将关系式中的向量稍加调整,便可以得出这一关系式.由此,学生想到能不能根据垂心、内心、外心的基底表示形式,也同样获得关于垂心、内心、外心的向量等式呢?学生还想到用向量去探讨与几何有关的更多的数学命题.这样的探究如若进行下去,学生对于向量工具作用的认识无疑会更上一个新台阶.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验)[M].北京:人民教育出版社,2003,4
[2]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018,1
[3]单墫.苏教版普通高中数学课程标准实验教科书数学4(必修)[M].南京:江苏教育出版社,2010,5
[4]单墫.苏教版普通高中数学课程标准实验教科书高中数学教学参考书数学4(必修)[M].南京:江苏教育出版社,2010,7
[5]刘绍学.普通高中数学课程标准实验教科书数学4(必修)A版[M].北京:人民教育出版社,2004,10
[6]张景中,彭翕成.向量教学存在的问题及对策[J].数学通报,2009,48(9)