江苏省仪征中学2020-2021学年高三年级12月数学检测试题

2020.12.11

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合要求）

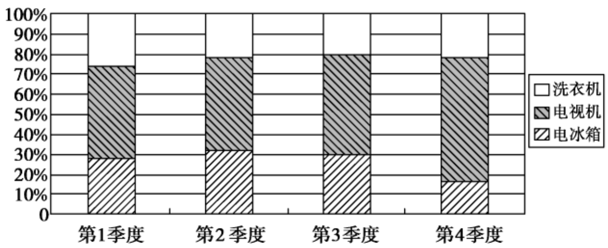
1. 已知集合 $A=\{x|x^2-2x<0\}$，$B=\{x|x-1\geq 0\}$，则集合 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|0<x<2\}$　　B．$\{x|0<x\leq 1\}$　　C．$\{x|x\geq 1\}$　　D．$\{x|1\leq x<2\}$

2. 若复数 z_1 对应复平面内的点（2，﹣3），且 $z_1\bullet z_2=1+i$，则复数 z_2 的虚部为（　　）

A．$-\dfrac{5}{13}$　　B．$\dfrac{5}{13}$　　C．$-\dfrac{1}{13}$　　D．$\dfrac{1}{13}$

3. 下图是某商场2018年洗衣机、电视机和电冰箱三种电器各季度销量的百分比堆积图(例如：第3季度内，洗衣机销量约占20%，电视机销量约占50%，电冰箱销量约占30%)．根据该图，以下结论中一定正确的是(　　)



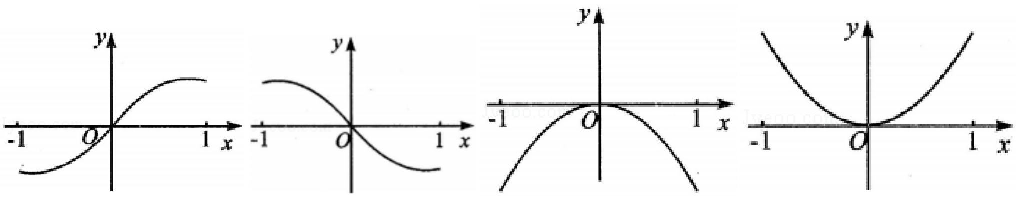
A．电视机销量最大的是第4季度　　B．电冰箱销量最小的是第4季度

C．电视机的全年销量最大　　D．电冰箱的全年销量最大

4. 网络用语“车珠子”，通常是指将一块原料木头通过加工打磨，变成球状珠子的过程．某同学有一圆锥状的木块，想把它“车成珠子”，经测量，该圆锥状木块的底面直径为12 cm，体积为96π cm^3，假设条件理想，他能成功，则该珠子的体积最大值是(　　)

A．36π cm^3　　B．12π cm^3　　C．9π cm^3　　D．72π cm^3

5. 函数$f(x)=cosx\cdot ln(\sqrt{x^2+1}-x)$在[﹣1，1]的图象大致为（　　）



A　　B　　C　　D

6. 已知双曲线 E：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右顶点为 A，O 为坐标原点，A 为 OM 的中点，若以 AM 为直径的圆与 E 的渐近线相切，则双曲线 E 的离心率等于(　　)

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

7. 计算：$\dfrac{1-\cos^2 10°}{\cos 80°\sqrt{1-\cos 20°}}$等于(　　)

A.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln（2-x），x\le 1,\\ -x^2+1，x>1,\end{cases}$ 若$|f(x)|-ax+a\ge 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $\left[-\dfrac{1}{2}，1\right]$　　B.[0，1]　　C.[1，+∞)　　D.[0，2]

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合要求.全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分）

9. 下列计算正确的是(　　)

A. $\sqrt[12]{(-3)^4}=\sqrt[3]{-3}$　　B. $2^{1-\log_2 3}=\dfrac{2}{3}$　　C. $\sqrt{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{3}$　　D. $\log_3(-4)^2=4\log_3 2$

10. 关于函数 $f(x)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，下列正确命题是(　　)

A. $y=f(x)$的最大值为 2

B. $y=f(x)$是以 π 为最小正周期的周期函数

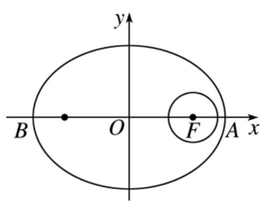
C. $y=f(x)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{24}，\dfrac{13\pi}{24}\right)$上单调递减

D. 将函数 $y=\sqrt{2}\cos 2x$ 的图像向左平移$\dfrac{\pi}{24}$个单位长度后，将与已知函数的图像重合

11. 已知圆 C_1：$(x+6)^2+(y-5)^2=4$，圆 C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$，M，N 分别为圆 C_1 和 C_2 上的动点，P 为 x 轴上的动点，则$|PM|+|PN|$的值可以是(　　)

A．6　　B．7　　C．10　　D．15

12. 某颗人造地球卫星的运行轨道是以地球的中心 F 为一个焦点的椭圆，如图所示，已知它的近地点 A(离地面最近的点)距地面 m 千米，远地点 B(离地面最远的点)距地面 n 千米，并且 F，A，B 三点在同一直线上，地球半径约为 R 千米，设该椭圆的长轴长、短轴长、焦距分别为 $2a,2b,2c$，则(　　)



A．$a-c=m+R$　　B．$a+c=n+R$

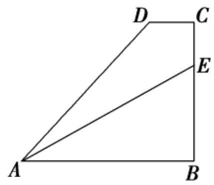
C．$2a=m+n$　　D．$b=\sqrt{(m+R)(n+R)}$

三、填空题（本大题共4个小题，每小题5分，共20分）

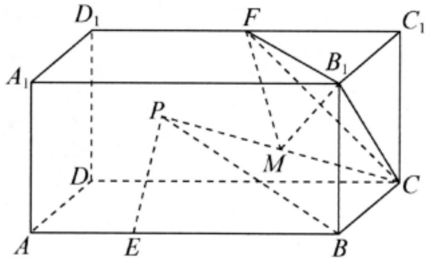
13. 已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线与x轴交于点A，点M(0，3)，若△AMF为正三角形，则$p=$________.

14. 已知函数$f(x)=\dfrac{x^2+ax+11}{x+1}(a\in \mathbf{R})$，若对于任意的$x\in \mathbf{N}^*$，$f(x)\geq 3$恒成立，则$a$的取值范围是________.

15. 如图，在直角梯形 ABCD 中，$\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，且$\overrightarrow{AE}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，则 $2r+3s$的值为________.



16. 古希腊数学家阿波罗尼奥斯发现：平面上到两定点A，B距离之比为常数λ(λ> 0且λ≠1)的点的轨迹是一个圆心在直线AB上的圆，该圆简称为阿氏圆.根据以上信息，解决下面的问题：
如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AB= 2AD= 2AA_1=6，点E在棱AB上，BE=2AE，动点 P 满足BP=$\sqrt{3}$PE，若点 P 在平面ABCD内运动，则点 P 所形成的阿氏圆的半径为_____；若点P在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 内部运动，F为棱C_1D_1的中点， M为CP的中点，则三棱锥M-B_1CF的体积的最小值为________.



四、解答题（本大题共6小题，计70分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分10分）

已知ΔABC中，三个内角A，B，C所对的边分别是a，b，c.

（1）证明：$a\cos B+b\cos A=c$；

（2）在① $\dfrac{2c-b}{\cos B}=\dfrac{a}{\cos A}$，② $\cos A=2b\cos A-a\cos C$，③ $2a-\dfrac{b\cos C}{\cos A}=\dfrac{c\cos B}{osA}$.

这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答.

若$a=7$，$b=5$，________，求ΔABC的周长.

18.（本小题满分12分）

已知直线 l：$kx-y-2k=0$，圆 C：$x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

(1)求证：无论 k 取何值，直线 l 与圆 C 都有两个交点；

(2) 是否存在实数 k，使以 l 被圆 C 截得的弦 AB 为直径的圆过点 C？若存在，求出实数 k 的值；若不存在，请说明理由.

19.（本小题满分12分）

已知椭圆 C 的两个焦点分别为 $F_1(-\sqrt{3}，0)$，$F_2(\sqrt{3}，0)$，且椭圆 C 过点 $P\left(1，\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

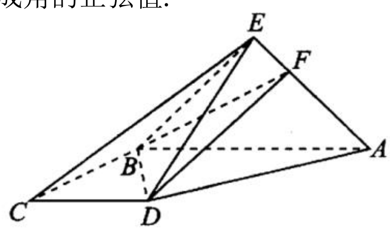
(2)若与直线 OP(O 为坐标原点)平行的直线交椭圆 C 于 A，B 两点，求△AOB 的面积的最大值.

20.（本小题满分12分）

如图，在四棱锥 $E-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB//CD$，$BC\perp CD$，$AB=2BC=2CD$，$\triangle EAB$ 是以 AB 为斜边的等腰直角三角形，且平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，点 F 满足，$\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{EA}(\lambda\in[0,1])$.

（1）试探究 λ 为何值时，CE//平面 BDF，并给予证明；

（2）在（1）的条件下，求直线AB与平面BDF所成角的正弦值.



21.（本小题满分12分）

交强险是车主必须为机动车购买的险种，若普通 6 座以下私家车投保交强险第一年的费用(基准保费)统一为 a 元，在下一年续保时，实行的是费率浮动机制，保费与上一年度车辆发生道路交通事故的情况相联系，发生交通事故的次数越多，费率也就越高，具体浮动情况如表：

交强险浮动因素和浮动费率比率表		
	浮动因素	浮动比率
A_1	上一个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 10%
A_2	上两个年度未发生有责任道路交通事故	下浮 20%
A_3	上三个及以上年度未发生有责任道路交通事故	下浮 30%
A_4	上一个年度发生一次有责任不涉及死亡的道路交通事故	0%
A_5	上一个年度发生两次及两次以上有责任道路交通事故	上浮 10%
A_6	上一个年度发生有责任道路交通死亡事故	上浮 30%

某机构为了研究某一品牌普通 6 座以下私家车的投保情况，随机抽取了 80 辆车龄已满三年的该品牌同型号私家车的下一年续保时的情况，统计得到了下面的表格：

类型	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
数量	20	10	10	20	15	5

以这 80 辆该品牌车的投保类型的频率代替一辆车投保类型的概率，完成下列问题：

(1)按照我国《机动车交通事故责任强制保险条例》汽车交强险价格的规定，$a=950$. 某同学家里有一辆该品牌车且车龄刚满三年，记 X 为该品牌车在第四年续保时的费用，求 X 的分布列与数学期望；(数学期望保留到个位数字)

(2)某二手车销售商专门销售这一品牌的二手车，且将下一年的交强险保费高于基本保费的车辆记为事故车．假设购进一辆事故车亏损 4 000 元，一辆非事故车盈利 8 000 元．

(ⅰ)若该销售商购进三辆(车龄已满三年)该品牌二手车，求这三辆车中至多有一辆事故车的概率；

(ⅱ)若该销售商一次购进 100 辆(车龄已满三年)该品牌二手车，求他获得利润的期望值．

22.（本小题满分12分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=1$ 时，方程 $f(x)=m(m<-2)$有两个相异实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，证明：$x_1\cdot x_2^2<2$.

江苏省仪征中学2020-2021学年高三年级12月数学检测答案

一、单项选择题

1.D　2. B　3. C　4. A　5. B　6. A　7. A　8. D

二、多项选择题

9. BCD　10. BC　11. BCD　12. ABD

三、填空题

13. $2\sqrt{3}$　14. $\left[-\dfrac{8}{3},\ +\infty\right)$　15. 3　16. $2\sqrt{3}$；$\dfrac{9}{4}$

四、解答题

17. 解：（1）根据余弦定理：$a\cos B+b\cos A=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{2c}=c$，所以$a\cos B+b\cos A=c$.

（2）选①：因为$\dfrac{2c-b}{\cos B}=\dfrac{a}{\cos A}$，所以$2c\cdot\cos A=b\cos A+a\cos B$，

所以由（1）中所证结论可知，$2c\cos A=c$，即$\cos A=\dfrac{1}{2}$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；

选②：因为$c\cos A=2b\cos A-a\cos C$，所以$2b\cos A=a\cos C+c\cos A$，
由（1）中的证明过程同理可得，$a\cos C+c\cos A=b$，

所以$2b\cos A=b$，即$\cos A=\dfrac{1}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；

选③：因为$2a-b\cdot\dfrac{\cos C}{\cos A}=c\cdot\dfrac{\cos B}{\cos A}$，所以$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，
由（1）中的证明过程同理可得，$b\cos C+c\cos B=a$，

所以$2a\cos A=a$，即$\cos A=\dfrac{1}{2}$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理知，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+c^2-10c\cdot\dfrac{1}{2}=49$，

即$c^2-5c-24=0$，解得$c=8$或$c=-3$（舍），所以$a+b+c=7+5+8=20$，
即$\triangle ABC$的周长为20.

18. 解：(1) 直线 l 的方程可化为 $k(x-2)-y=0$，所以直线 l 过定点(2,0).

由于 $2^2+0^2-2\times2-2\times0-2<0$，故点(2,0)在圆 C 内，所以直线 l 与圆 C 恒有两个交点.

(2) 解：存在．因为 l 被圆 C 截得的弦 AB 为直径的圆过点 C，所以$CA\perp CB$，

又因为$CA=CB$，所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|k-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解之得 $k=1$.

19. 解：(1)设椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由题意可得$\begin{cases}a^2-b^2=3,\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$ 故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)直线 OP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，设直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．将直线 AB 的方程代入椭圆 C 的方程并整理得 $x^2+\sqrt{3}mx+m^2-1=0$，

由 $\Delta=3m^2-4(m^2-1)>0$，得 $m^2<4$，所以 $x_1+x_2=-\sqrt{3}m$，$x_1x_2=m^2-1$.

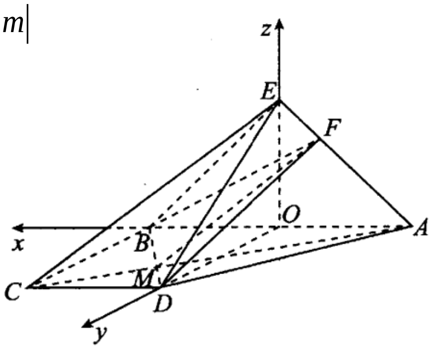
又 $AB=\sqrt{1+\frac{3}{4}}\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\sqrt{4-m^2}$，$O$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}}=\frac{|m|}{\frac{\sqrt{7}}{2}}$,

所以 $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\sqrt{4-m^2}\times\frac{|m|}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{4-m^2}\times|m|$

$\leq\frac{1}{2}\times\frac{4-m^2+m^2}{2}=1$（当且仅当$\sqrt{4-m^2}=|m|$，

即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时取等号，符合 $m^2<4$）.

所以$\triangle AOB$ 面积的最大值为 1.



20. 解：（1）当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，CE//平面 FBD.

证明如下：连接 AC，交 BD 于点 M，连接 MF.，因为 $AB//CD$，

所以 AM：$MC=AB$：$CD=2$：1，又 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$，所以 FA：$EF=2$：1.

所以 AM：$MC=AF$：$EF=2$：1，所以 $MF//CE$.

又 $MF\subset$平面 BDF，$CE\not\subset$平面 BDF，所以 CE//平面 BDF.

（2）取 AB 的中点 O，连接 EO，OD，则 $EO\perp AB$.

又因为平面 $ABE\perp$平面 $ABCD$，平面 $ABE\cap$平面 $ABCD=AB, EO\subset$平面 ABE，

所以 $EO\perp$平面 $ABCD$，因为 $OD\subset$平面 $ABCD$，所以 $EO\perp OD$.

由 $BC\perp CD$，及 $AB=2CD$，$AB//CD$，得 $OD\perp AB$，

由 OB，OD，OE 两两垂直，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

因为 ΔEAB 为等腰直角三角形，$AB=2BC=2CD$，

所以 $OA=OB=OD=OE$，设 $OB=1$，

所以 $O(0,0,0), A(-1,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0)$，$D(0,1,0), E(0,0,1)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EA}=\left(-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right),F\left(-\frac{1}{3},0,\frac{2}{3}\right)$，所以 $\overrightarrow{FB}=\left(\frac{4}{3},0,-\frac{2}{3}\right)$

设平面 BDF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-x+y=0\\ \frac{4}{3}x-\frac{2}{3}z=0\end{cases}$，

取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,1,2)$.设直线 AB 与平面 BDF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\bullet\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|2\times1+0\times1+0\times2\right|}{2\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

即直线 AB 与平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

21. 解：(1)由题意可知 X 的可能取值为 $0.9a$，$0.8a$，$0.7a$，a，$1.1a$，$1.3a$.由统计数据可知

$P(X=0.9a)=\frac{1}{4}$， $P(X=0.8a)=\frac{1}{8}$， $P(X=0.7a)=\frac{1}{8}$，

$P(X=a)=\frac{1}{4}$， $P(X=1.1a)=\frac{3}{16}$， $P(X=1.3a)=\frac{1}{16}$，

所以 X 的分布列为

X	$0.9a$	$0.8a$	$0.7a$	a	$1.1a$	$1.3a$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

所以数学期望 $E(X)=0.9a\times\frac{1}{4}+0.8a\times\frac{1}{8}+0.7a\times\frac{1}{8}+a\times\frac{1}{4}+1.1a\times\frac{3}{16}+1.3a\times\frac{1}{16}\approx903$.

(2)(ⅰ)由统计数据可知任意一辆该品牌车龄已满三年的二手车为事故车的概率为$\frac{1}{4}$，三辆车中至多有一辆事故车的概率为 $P=\left(1-\frac{1}{4}\right)^3+C_3^1\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{32}$.

(ⅱ)设 Y 为该销售商购进并销售一辆二手车的利润，Y 的可能取值为－4 000，8 000.

所以 Y 的分布列为

Y	－4 000	8 000
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

所以数学期望 $E(Y)=-4\,000\times\frac{1}{4}+8\,000\times\frac{3}{4}=5\,000$，

所以该销售商一次购进100辆该品牌车龄已满三年的二手车获得利润的期望为 $100\times E(Y)=500\,000$元.

22. 解：(1)由题意得，$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$.

当 $a\leq0$ 时，由于 $x>0$，可得 $1-ax>0$，即 $f'(x)>0$.

所以此时 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{a}$，由 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{1}{a}$，所以此时 $f(x)$在区间$\left(0，\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递减.

综上，当 $a\leq 0$ 时，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$\left(0，\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a}，+\infty\right)$上单调递减.

(2)**证**：由题意及(1)知，方程 $f(x)=m(m<-2)$的两个相异实根 x_1，x_2 满足 $\ln x-x-m=0$，且 $0<x_1<1<x_2$，即 $\ln x_1-x_1-m=\ln x_2-x_2-m=0$.

由题意，可知 $\ln x_1-x_1=m<-2<\ln 2-2$，

又由(1)可知，$f(x)=\ln x-x$ 在区间$(1，+\infty)$上单调递减，故 $x_2>2$.令 $g(x)=\ln x-x-m$，

则 $g(x)-g\left(\frac{2}{x^2}\right)=-x+\frac{2}{x^2}+3\ln x-\ln 2$.

令 $h(t)=-t+\frac{2}{t^2}+3\ln t-\ln 2(t>2)$，

则 $h'(t)=-\frac{(t-2)^2(t+1)}{t^3}$.

当 $t>2$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$是减函数，所以 $h(t)<2\ln 2-\frac{3}{2}<0$，所以 $g(x)<g\left(\frac{2}{x^2}\right)$.

因为$x_2>2$且$g(x_1)=g(x_2)$，所以$h(x_2)=g(x_2)-g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)=g(x_1)-g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)<0$，即$g(x_1)<g\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$.因为$g(x)$在区间$(0，1)$上单调递增，所以$x_1<\frac{2}{x_2^2}$，故$x_1\cdot x_2^2<2$.