2014 年北京理科卷第 18 题解法探究及背景追溯

王 耀 （江苏省苏州市田家炳实验高级中学 215006）

2014 年北京高考数学理科试卷第 18 题以正余弦函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 及一次函数 $y=x$ 为命题背景，对学生应用数学知识的能力进行了有效的考查．本文将从此题出发，研究解题思路及命题背景，并将其应用到一类主要涉及 x 与 $\sin x$ 之间不等关系的问题分析中去．

1 试题呈现

（2014·北京）已知函数 $f(x)=x\cos x-\sin x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$．

（1）求证：$f(x)\leqslant 0$；

（2）若 $a<\frac{\sin x}{x}<b$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，求 a 的最大值与 b 的最小值．

2 解法探究

2.1 试题分析

（1）要证明 $f(x)\leqslant 0$，即要证当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f_{\max}(x)\leqslant 0$．

又函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=-x\sin x$，由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 可知 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，则有 $f'(x)\leqslant 0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调减函数，即 $f_{\max}=f(0)=0$，从而 $f(x)\leqslant 0$，得证．

（2）由 $a<\frac{\sin x}{x}<b$，得 $ax<\sin x<bx$，则问题转化为 $\begin{cases}\sin x-bx<0,\\ \sin x-ax>0.\end{cases}$

令 $g(x)=\sin x-bx$，则 $g'(x)=\cos x-b$．首先，由题意易知 $b\geqslant 0$．当 $b\geqslant 1$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，那么 $g(x)<g(0)=0$．当 $0<b\leqslant 1$ 时，设 $g'(x_1)=\cos x_1-b=0$，那么当 $x\in(0,x_1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)<g(x_1)$．又 $g(x_1)>g(0)=0$，与 $g(x)<0$ 矛盾，故 $b\geqslant 1$．

再令 $h(x)=\sin x-ax$，则 $h'(x)=\cos x-a$．由 $b\geqslant 1$ 可知 $a<1$．当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，即 $h(x)>h(0)=0$．当 $0<a<1$ 时，设 $h'(x_2)=\cos x_2-a=0$，那么当 $x\in(0,x_2)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in\left(x_2,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，则有 $\min\left\{h(0),h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}\geqslant 0$，解得 $0<a\leqslant\frac{2}{\pi}$．因此得到 $a\leqslant\frac{2}{\pi}$．

综上，若 $a<\frac{\sin x}{x}<b$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，a 的最大值与 b 的最小值分别为 $\frac{2}{\pi}$ 和 1．

2.2 背景探究

探究 1 基于几个三角不等式的命题背景溯源

第（1）题中，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x\cos x-\sin x\leqslant 0$ 等价于 $x\leqslant\tan x$；第（2）题中，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{\sin x}{x}<1$ 等价于 $\sin x<x$，由此可知当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立．

这个问题在许多教材中出现过，例如高中数学教材（苏教版）必修 4 第 24 页“拓展·探究”部分：“若 α 为锐角（单位为弧度），试利用单位圆及三角函数线，比较 α，$\sin\alpha$，$\tan\alpha$ 之间的大小关系．”

又由 $\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1$，可知 $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$，这个著名的不等式是 Jordan 于 1893 年在其所著的《分析教程》中首次使用，因此在数学史上也被称为 Jordan 不等式．

上述两个不等式的证明方法，除了利用导数去分析，仍可基于单位圆进行证明，具体过程如下：

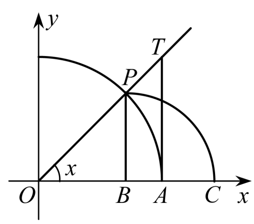

图 1

作角 x 的终边与单位圆交于点 P，分别作出其正弦线 $BP=\sin x$，正切线 $AT=\tan x$（如图 1）．由弧长公式可知 $AP=x$，由 $BP\leqslant AP$ 可知 $\sin x\leqslant x$．

又扇形 AOP 的面积 $S_{AOP}=\frac{x}{2}$，$\triangle AOT$ 的面积 $S_{AOT}=\frac{\tan x}{2}$，那么易知 $x\leqslant\tan x$．

最后，再以 B 点为圆心、$BP=\sin x$ 为半径作 $\frac{1}{4}$ 圆周，那么 $CP=\frac{\pi}{2}\sin x$．由 $AP\leqslant CP$ 可知 $x\leqslant\frac{\pi}{2}\sin x$，即 $\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x$．

综上可知，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x\leqslant x$

$\leqslant \tan x$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立．

探究 2　基于函数图象表征的命题背景研究

前文中，笔者在分析问题"$a<\frac{\sin x}{x}<b$"时，将其转化为求函数 $y=\sin x-ax$ 与 $y=\sin x-bx$ 的最值问题，主要还是沿袭了第(1)题的分析思路．然而此处也可采用"数形结合"的方法，即考虑正弦函数 $y=\sin x$ 的图象与函数 $y=ax$，$y=bx$ 的关系．

从本质上看，可构建结构式 $k=\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}$，则 k 表示函数 $y=\sin x\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 上的点 $P(x,\sin x)$ 与原点 $O(0,0)$ 连线的斜率．由图 2 易知割线 OP 的斜率 $k\geqslant\frac{2}{\pi}$，难点在于 $k\leqslant 1$，即如何得到 $\sin x<x$．这里，由教材中导数概念的引入可知，当点 P 无限逼近原点 O 时，此时割线 OP 就成为点 O 处最逼近正弦曲线的直线，即曲线在原点处的切线，其斜率为 $(\sin x)'|_{x=0}=\cos x|_{x=0}=1$．由此可知函数 $y=\sin x$ 在原点处的切线恰好为直线 $y=x$，并且发现函数 $y=\sin x\left(x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 的图象恰好夹在两条直线 $y=x$ 与 $y=\frac{2}{\pi}x$ 之间．这一知识点也曾经出现在 2007 年江西高考试卷与 2012 年江苏省南通市高三一模试卷中：

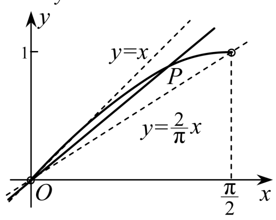

图 2

试题 1　(2007·江西文)若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则下列不等式成立的是(　　)．

(A) $\sin x<\frac{2}{\pi}x$　　(B) $\sin x>\frac{2}{\pi}x$

(C) $\sin x<\frac{3}{\pi}x$　　(D) $\sin x>\frac{3}{\pi}x$

试题 2　(2007·江西理)若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则下列不等式成立的是(　　)．

(A) $\sin x<\frac{3}{\pi}x$　　(B) $\sin x>\frac{3}{\pi}x$

(C) $\sin x<\frac{4}{\pi^2}x^2$　　(D) $\sin x>\frac{4}{\pi^2}x^2$

试题 3　(2012·南通一模)若 $a_1x\leqslant\sin x\leqslant a_2x$ 对任意的 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 都成立，则 a_2-a_1 的最小值为________．

分析　试题 1 主要考查利用图象推导出不等式 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$；同理，试题 2 依然可以利用图象，如图 3，只要二次函数 $y=ax^2$ 图象(图 3)上的点 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{a\pi^2}{4}\right)$ 位于点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 下方即可，则有 $\frac{a\pi^2}{4}\leqslant 1$，解得 $a\leqslant\frac{4}{\pi^2}$，那么得到 $\sin x>\frac{4}{\pi^2}x^2$．试题 2 也可用代数法进行证明，过程如下：

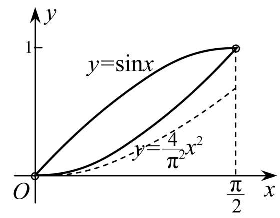

图 3

由 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x>\frac{2}{\pi}x$，可知 $\sin^2 x>\left(\frac{2}{\pi}x\right)^2=\frac{4}{\pi^2}x^2$．又 $\sin x\in(0,1)$，则 $\sin^2 x<\sin x$，因此 $\sin x>\sin^2 x>\frac{4}{\pi^2}x^2$，亦即 $\frac{\sin x}{x}>\frac{4x}{\pi^2}$．试题 3 的本质与北京卷的这道高考题如出一辙，答案即为 $\frac{2}{\pi}-1$．

探究 3　基于函数 $w(x)=\frac{\sin x}{x}(0<x<\pi)$ 的命题背景开发

针对"$a<\frac{\sin x}{x}<b$"这一结构而言，若令 $w(x)=\frac{\sin x}{x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，则问题将被转化为求函数 $w(x)$ 的值域问题．

首先，函数 $w(x)$ 的导函数 $w'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，与第(1)题的联系突然显现，分子部分即为题(1)所求证的结构．那么，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$w'(x)<0$，即 $w(x)>w\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$，$w(x)<w(0)$．然而，当 $x=0$ 时，为"$\frac{0}{0}$"型，给分析造成障碍．由高等数学的相关知识可知"当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 1$"，此处不再深入．由此可见，采用上述分析思路虽可取，但是会导致新的问题，这就要求学生去寻找本题高等数学背景下的初等解法．

事实上，对函数 $w(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的研究还是有价值的，2014 年江苏高考试题第 23 题(附加题)也是基于这个函数命制的．接下来，主要分析这个函数的性质：

定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

奇偶性：由 $w(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$ 可知其为偶函数；

单调性：前文分析得到它在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函

数，再根据其导函数表达式还发现，当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$w'(x)<0$ 依然成立，由此可知其为 $(0,\pi)$ 上的减函数；

零点：由 $w(x)=0$ 解得 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$；

渐近线：当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$，则 x 轴为其渐近线．又 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|}$，故函数 $w(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在图形 $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 之间．

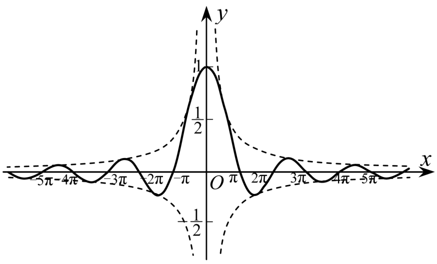

图 4

结合上述分析，利用数学软件得到函数 $w(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的大致图形(如图 4)．在物理学上，有一类函数称为阻尼函数 $f(x)=g(x)\sin x$(其中 $g(x)$ 为单调函数)，很显然 $w(x)$ 也为阻尼函数．

3　试题拓展

例 1　(1) 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则“$x\sin^2 x<1$”是“$x\sin x<1$”的______ 条件．(填充要关系)

(2) 已知函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，判断下列三个命题的真假：

① $f(x)$ 为偶函数；② $f(x)<1$；③ 当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取极小值．

其中为真命题的是______．

(3)(2014 • 太原一模) 已知方程 $\frac{|\sin x|}{x}=k$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的解 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$，则下面结论正确的是(　　)．

(A) $\sin\alpha=\alpha\cos\beta$　　(B) $\sin\alpha=-\alpha\cos\beta$

(C) $\cos\alpha=\beta\sin\beta$　　(D) $\sin\beta=-\beta\sin\alpha$

解析　(1) 由 $0<\sin x<1$，可知当 $x\sin x<1$ 时，$x\sin^2 x<\sin x<1$；反之，当 $x\sin^2 x<1$ 时，$x\sin x<\frac{1}{\sin x}$，其中 $\frac{1}{\sin x}>1$，故 $x\sin x<1$ 不恒成立．因此，“$x\sin^2 x<1$”是“$x\sin x<1$”的必要不充分条件．

(2) 易知 ①② 为真命题；当 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0$ 时，由 $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$ 可知 ③ 为假命题．

(3) 作出函数 $y=\frac{|\sin x|}{x}$ 的大致图形，如图 5 所示，其中 $0<\alpha<\pi$，$\pi<\beta<2\pi$．由题意知 $k=\frac{\sin\alpha}{\alpha}=-\frac{\sin\beta}{\beta}$，并且 $x=\beta$ 为函数 $w(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的极值点，故 $w'(\beta)=0$，即 $\beta\cos\beta=\sin\beta$，那么 $k=-\frac{\sin\beta}{\beta}=-\cos\beta$，即有 $\sin\alpha=-\alpha\cos\beta$，故选 B．

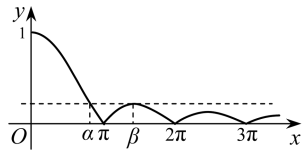

图 5

例 2　(1) 求证：如果 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，那么 $\cos^2 x+x\sin x\geqslant 1$；

(2) 求证：如果 $0<x<\frac{\pi}{2}$，那么 $\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^2}{4}$；

(3) 求证：如果 $0<x<\frac{\pi}{2}$，那么 $1-\frac{x^2}{2}<\frac{\sin x}{x}<\cos\frac{x}{2}$；

(4) 求证：如果 $0<y<x<\frac{\pi}{2}$，那么 $\sin x-\sin y<x-y<\tan x-\tan y$．

简证　(1) 由 $0\leqslant\sin x\leqslant x$ 可知 $\cos^2 x+x\sin x\geqslant\cos^2 x+\sin x\cdot\sin x=1$．

(2) $\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x}=\frac{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\tan\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}>1-\sin^2\frac{x}{2}>1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{4}$．

(3) 首先有 $\frac{\sin x}{x}>\cos x$，且 $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}>1-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{2}$，则 $\frac{\sin x}{x}>1-\frac{x^2}{2}$；另一方面，$\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x}=\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}<\cos\frac{x}{2}$．

(4) 令 $g(x)=\sin x-x$，$h(x)=\tan x-x$，即证：$g(x)<g(y)$，$h(x)>h(y)\left(0<y<x<\frac{\pi}{2}\right)$．由 $g'(x)=\cos x-1<0$，可知 $g(x)$ 为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的减函数；由 $h'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1>0$，可知 $h(x)$ 为 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数，故原不等式得证．