

2021 届高三第一次联考

数学试题

命题学校：华中师大一附中 命题人：田甜

审题人：王雪冰 吴巨龙

考试时间：2020 年 12 月 30 日上午 8:00—10:00

试卷满分 150 分

考试用时 120 分钟

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z = \frac{1+i}{1-2i} \cdot i^3$ ，则 z 的虚部为

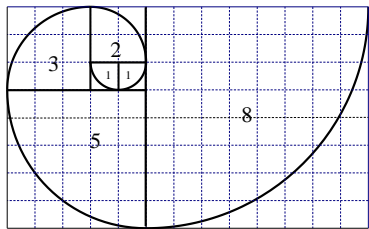
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}i$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}i$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$ ， $B = \{x | x > m\}$ ，若 $A \cup B = \{x | x > 1\}$ ，则

- A. $m \geq 1$ B. $1 \leq m < 3$ C. $1 < m < 3$ D. $1 \leq m \leq 3$

3. 斐波那契螺旋线被誉为自然界最完美的“黄金螺旋”，它的画法是：以斐波那契数：1, 1, 2, 3, 5, …为边的正方形拼成长方形，然后在每个正方形中画一个圆心角为 90° 的圆弧，这些圆弧所连起来的弧线就是斐波那契螺旋线。自然界存在很多斐波拉契螺旋线的图案，例如向日葵、鹦鹉螺等。下图为该螺旋线的前一部分，如果用接下来的一段圆弧所对应的扇形做圆锥的侧面，则该圆锥的底面半径为

- A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ B. $\frac{13}{8}$
 C. $\frac{13}{4}$ D. $\frac{13}{2}$



4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + 3a, & (x < 1) \\ 2x + \frac{2}{x-1} + 3, & (x > 1) \end{cases}$ ，若 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$ ，则 a 的值为

- A. 0 B. 1 或 4 C. 1 D. 4

5. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = 1$ ， $AC = 3$ ， $\cos A = \frac{1}{4}$ ，点 E 在直线 BC 上，且满足：

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC} (\lambda \in \mathbb{R})$$

，则 $|\overrightarrow{AE}| =$

- A. $\sqrt{34}$ B. $3\sqrt{6}$ C. 3 D. 6

6. 设双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线的左支交于点 A ,

与双曲线的渐近线在第一象限交于点 B , 若 $BF_1 \perp BF_2$, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为

- A. $4\sqrt{3}+2$ B. $4\sqrt{3}-2$ C. $4+2\sqrt{3}$ D. $4-2\sqrt{3}$

7. 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B 满足 $\sin A - \cos B + A + B < \frac{\pi}{2}$, 则下列结论一定正确的是

- A. $\sin A < \cos C$ B. $\sin A > \cos B$
C. $\sin B < \cos A$ D. $\sin C < \sin B$

8. 将一条均匀柔软的链条两端固定, 在重力的作用下它所呈现的形状叫悬链线, 例如悬索桥等.

建立适当的直角坐标系, 可以写出悬链线的函数解析式为 $f(x) = a \cosh \frac{x}{a}$, 其中 a 为悬链线系

数, $\cosh x$ 称为双曲余弦函数, 其函数表达式为 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 相应地双曲正弦函数的函数

表达式为 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 若直线 $x = m$ 与双曲余弦函数 C_1 和双曲正弦函数 C_2 分别相交于点

A, B , 曲线 C_1 在点 A 处的切线与曲线 C_2 在点 B 处的切线相交于点 P , 则

- A. $y = \sinh x \cosh x$ 是偶函数 B. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$
C. $|BP|$ 随 m 的增大而减小 D. $\triangle PAB$ 的面积随 m 的增大而减小

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + a = 0$ 上至多有一点到直线 $3x + 4y + 5 = 0$ 的距离为 2, 则实数 a 可能的取值为

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 10

10. 下列命题中正确的是

- A. $\exists x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$ B. $\forall x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$
C. $\forall x \in (0, \frac{1}{2}), \left(\frac{1}{2}\right)^x > x^{\frac{1}{2}}$ D. $\exists x \in (0, \frac{1}{3}), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{3}} x$

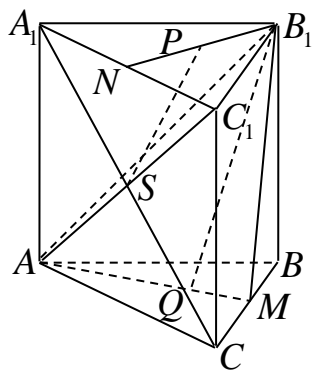
11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1 > 1$, 公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 函数

$f(x) = x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$, 若 $f'(0) = 1$, 则

- A. $\{\lg a_n\}$ 为单调递增的等差数列 B. $0 < q < 1$
 C. $\{S_n - \frac{a_1}{1-q}\}$ 为单调递增的等比数列 D. 使得 $T_n > 1$ 成立的 n 的最大值为 6

12. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $AA_1 = 2$, M 是 BC 的中点, N 是 A_1C_1 的中点, 点 P 在线段 B_1N 上, 点 Q 在线段 AM 上, 且 $AQ = \frac{2}{3}AM$, S 是 AC_1 与 A_1C 的交点, 若 $PS \parallel$ 面 B_1AM , 则

- A. $PS \parallel B_1Q$
 B. P 为 B_1N 的中点
 C. $AC \perp PS$
 D. 三棱锥 $P - B_1AM$ 的体积为 $\frac{2}{3}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设随机变量 $X \sim B(n, \frac{1}{4})$, $Y = 2X + 1$, 若 $E(Y) = 4$, 则 $n =$ _____.

14. 武汉某学校的四名党员教师积极参加党员干部下沉社区的活动, 在活动中他们会被随机分配到 A、B、C 三个社区. 若每个社区至少分配一名党员教师, 且教师甲必须分配到 A 社区, 共有 _____ 种不同的分配方案.

15. 我国南宋时期杰出数学家秦九韶在《数书九章》中提出了“三斜求积术”, 即以小斜幂, 并大斜幂, 减中斜幂, 余半之, 自乘于上; 以小斜幂乘大斜幂, 减上, 余四约之, 为实; 一为从隅,

开平方得积. 把以上文字写成公式, 即 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ (其中 S 为三角形的面积,

a, b, c 为三角形的三边). 在非直角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 为内角 A, B, C 所对应的三边, 若 $a = 3$,

且 $a = c(\cos B + \sqrt{3} \cos C)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积最大时, $c =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = ae^x + \ln \frac{a}{x+2} - 2 (a > 0)$, 若 $f(x) > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = b_1 = 1$ ，

$$a_2 = a_3 - b_3, \quad a_3 = S_3 + b_2.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{a_n b_{n+1}}{a_{n+1} a_{n+2}}$ ， T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和，求数列 $\left\{ \frac{5}{5T_n + 2} \right\}$ 的前 n 项和 S'_n 。

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像是由 $y = \sqrt{2} \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到的。

(1) 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π ，求 $f(x)$ 的与 y 轴距离最近的对称轴方程；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上仅有一个零点，求 ω 的取值范围。

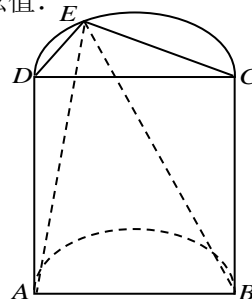
19. (12 分) 如图所示为一个半圆柱， E 为半圆弧 CD 上一点， $CD = \sqrt{5}$ 。

(1) 若 $AD = 2\sqrt{5}$ ，求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积的最大值；

(2) 有三个条件：① $4\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DC}$ ；② 直线 AD 与 BE 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$ ；

$$\textcircled{3} \frac{\sin \angle EAB}{\sin \angle EBA} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

请你从中选择两个作为条件，求直线 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值。



20. (12分) 国家发展改革委、住房城乡建设部于2017年发布了《生活垃圾分类制度实施方案》，规定46个城市在2020年底实施生活垃圾强制分类，垃圾回收、利用率要达35%以上。截至2019年底，这46个重点城市生活垃圾分类的居民小区覆盖率已经接近70%。武汉市在实施垃圾分类之前，从本市人口数量在两万人左右的320个社区中随机抽取50个社区，对这50个社区某天产生的垃圾量(单位：吨)进行了调查，得到如下频数分布表，并将人口数量在两万人左右的社区垃圾数量超过28吨/天的确定为“超标”社区：

| | | | | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 垃圾量 X | [12.5,15.5) | [15.5,18.5) | [18.5,21.5) | [21.5,24.5) | [24.5,27.5) | [27.5,30.5) | [30.5,33.5] |
| 频数 | 5 | 6 | 9 | 12 | 8 | 6 | 4 |

(1) 通过频数分布表估算出这50个社区这一天垃圾量的平均值 \bar{x} (精确到0.1)；

(2) 若该市人口数量在两万人左右的社区这一天的垃圾量大致服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，其中 μ 近似为(1)中的样本平均值 \bar{x} ， σ^2 近似为样本方差 s^2 ，经计算得 $s = 5.2$ 。请利用正态分布知识估计这320个社区中“超标”社区的个数。

(3) 通过研究样本原始数据发现，抽取的50个社区中这一天共有8个“超标”社区，市政府决定对这8个“超标”社区的垃圾来源进行跟踪调查。现计划在这8个“超标”社区中任取5个先进行跟踪调查，设 Y 为抽到的这一天的垃圾量至少为30.5吨的社区个数，求 Y 的分布列与数学期望。

(参考数据： $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ； $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ；

$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$)

21. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与抛物线 $M: y^2 = 4x$ 有公共的焦点, 且抛物线的准线被椭圆截得的弦长为 3.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过椭圆 C 的右焦点作一条斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线交椭圆于 A, B 两点, 交 y 轴于点 E , P 为弦 AB 的中点, 过点 E 作直线 OP 的垂线交 OP 于点 Q , 问是否存在一定点 H , 使得 QH 的长度为定值? 若存在, 则求出点 H , 若不存在, 请说明理由.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + m}{x^2}$.

(1) 当 $m = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的最大值;

(2) 讨论关于 x 的方程 $f(x) = m - \ln x$ 的实根的个数.