高三数学周三附加题训练 **6**　　2019/10/16

班级____________　　姓名____________　　学号___________

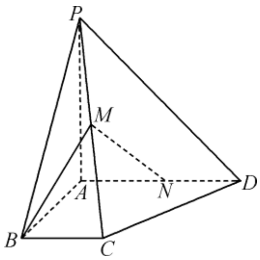
1.求椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$对应的变换作用下所得的曲线的方程.

2.在平面极坐标系下，已知曲线 C 的方程为$\rho\sin(\theta+\frac{5\pi}{12})=3$， 曲线 E 的方程为 ρ=3，求曲线 C 与曲线 E 公共点的坐标

3. 如图，在四棱锥 PABCD 中，PA⊥平面 ABCD，∠ABC＝∠BAD＝90°，AD＝AP＝4，AB＝BC＝2，M 为 PC 的中点．

(1) 求异面直线 AP，BM 所成角的余弦值；

(2) 点 N 在线段 AD 上，且 AN＝λ，若直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{4}{5}$，求 λ 的值．



4.设 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(n)=3^n+7^n-2$.

(1) 求 f(1)，f(2)，f(3)的值；

(2) 求证：对任意正整数 n，f(n)是 8 的倍数．

高三数学周三附加题训练 6 答案　　2019/10/15

1. **解**：设椭圆 C 上的点(x_1,y_1)在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的变换作用下得到点(x,y)，

则$\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}x_1\\ \frac{1}{2}y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，(5 分)

则$\begin{cases}x_1=3x,\\ y_1=2y,\end{cases}$ 代入椭圆方程$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $x^2+y^2=1$，

所以所求曲线的方程为 $x^2+y^2=1$.(10 分)

2．曲线 C 与曲线 E 公共点的极坐标为$(3,\frac{\pi}{12}+2k\pi),k\in Z$　（写对其中之一即可）

3. 解：(1) 因为 PA⊥平面 ABCD，且 AB，AD⊂平面 ABCD，

所以 PA⊥AB，PA⊥AD.

因为∠BAD＝90°，所以 PA，AB，AD 两两互相垂直.

以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$为正交基底建立空间直角坐标系，则由 AD＝AP＝4，AB＝BC＝2 可得 A(0，0，0)，B(2，0，0)，C(2，2，0)，D(0，4，0)，P(0，0，4).

因为 M 为 PC 的中点，所以 M(1，1，2).

所以$\overrightarrow{BM}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$，(2 分)

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BM}\rangle=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BM}|}=\frac{0\times(-1)+0\times1+4\times2}{4\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以异面直线 AP，BM 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.(5 分)

(2) 因为 AN＝λ，所以 N(0，λ，0)(0≤λ≤4)，则$\overrightarrow{MN}=(-1,\lambda-1,-2)$，$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}2y=0,\\ 2x-4z=0.\end{cases}$令 x＝2，解得 y＝0，z＝1，

所以 $\boldsymbol{m}=(2,0,1)$是平面 PBC 的一个法向量.(7 分)

因为直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{4}{5}$，

所以$|\cos\langle\overrightarrow{MN},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{MN}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|-2-2|}{\sqrt{5+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，解得 λ＝1∈[0，4]，

所以 λ 的值为 1.(10 分)

4. (1) **解**：代入求出 f(1)＝8，f(2)＝56，f(3)＝368.(3 分)

(2) **证明**：① 当 n＝1 时，f(1)＝8 是 8 的倍数，命题成立.(4 分)

② 假设当 n＝k 时命题成立，即 $f(k)=3^k+7^k-2$ 是 8 的倍数，

那么当 n＝k＋1 时，$f(k+1)=3^{k+1}+7^{k+1}-2=3(3^k+7^k-2)+4(7^k+1)$.

因为 7^k+1 是偶数，所以 $4(7^k+1)$是 8 的倍数.

又由归纳假设知 $3(3^k+7^k-2)$是 8 的倍数，所以 f(k＋1)是 8 的倍数，

所以当 n＝k＋1 时，命题也成立.

根据①②知命题对任意 $n\in\mathbf{N}^*$成立.(10 分)