# 江苏省仪征中学2019届高三下学期数学周末限时训练8

2019.05.11

## 第I卷

**注意事项:**

1．本试卷共4页，包括填空题(第1题~第14题)、解答题(第15题~第20题)两部分．本试卷满分为160分，考试时间为120分钟．

2．答题前，请务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答题卡的密封线内．试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内．考试结束后，交回答题纸．

**一、填空题:本大题共14小题，每小题5分，计70分．不需写出解答过程，请把答案写在答题卡的指定位置上．**

1．已知集合 $U=\{x|1<x<6，x\in \mathbf{N}\}$，$A=\{2，3\}$，那么 $\complement_U A=$______．

2．若复数 $z$ 满足 $z(1+\mathrm{i})=1$，其中i为虚数单位，则 $z$ 在复平面内对应的点在第______象限．

| | |
|---|---|
| 2 | 899 |
| 3 | 0112 |

（第3题图）

3．已知某商场在一周内某商品日销售量的茎叶图如图所示，那么这一周该商品日销售量的平均数为_____．

4．一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，输出 $S$ 的值为______．

```
S←0
For i From 1 To 3
    S←S+1/(i(i+1))
End  For
Print  S
```

（第4题图）

5．若实数 $x，y$ 满足 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0,\\ 2x+y\geqslant 0,\\ x\leqslant 1\end{cases}$，则 $x+3y$ 的最小值为______．

6．从1，2，3，4，5这5个数字中随机抽取3个不同的数字，则这3个数字经适当排序后能组成等差数列的概率为______．

7．若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0\\ f(x-2), & x>0\end{cases}$，则 $f(\log_2 3)=$______．

8．已知数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $2S_n=3^n-1$，$n\in \mathbf{N}^*$．若 $b_n=\log_3 a_n$，则 $b_1+b_2+b_3+b_4$ 的值为______．

9．函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})$，其中 $\omega>0$．若 $x_1$，$x_2$ 是方程 $f(x)=2$ 的两个不同的实数根，且$|x_1-x_2|$的最小值为π．则当 $x\in[0，\dfrac{\pi}{2}]$时，$f(x)$的最小值为______．

10．平面直角坐标系 $xOy$ 中，过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右焦点 $F$ 作一条渐近线的平行线，交另一条渐近线于点 $P$．若线段 $PF$ 的中点恰好在此双曲线上，则此双曲线的离心率为______．

11．有一个体积为 2 的长方体，它的长、宽、高依次为 $a$，$b$，1．现将它的长增加 1，宽增加 2，且体积不变，则所得新长方体高的最大值为______．

12．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是同一平面内的三个向量，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是夹角为 60°的两个单位向量．若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-5$，则$|\boldsymbol{c}|$的最小值为______．

13．平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知 $MN$ 是⊙$C$：$(x-1)^2+(y-2)^2=2$ 的一条弦，且 $CM\perp CN$，$P$ 是 $MN$ 的中点．当弦 $MN$ 在圆 $C$ 上运动时，直线 $l$：$x-3y-5=0$ 上存在两点 $A$，$B$，使得$\angle APB\geqslant\frac{\pi}{2}$恒成立，则线段 $AB$ 长度的最小值是______．

14．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x+x-\frac{1}{2}$，对任意 $x\in[1，+\infty)$，当 $f(x)\geq mx$ 恒成立时实数 $m$ 的最大值为 1，则实数 $a$ 的取值范围是______．

**二、解答题:本大题共 6 小题，计 90 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题卡的指定区域内．**

15．(本小题满分 14 分)

已知 $a$，$b$，$c$ 分别是△$ABC$ 三个角 $A$，$B$，$C$ 所对的边，且满足 $a\cos B+b\cos A=\frac{c\cos A}{\cos C}$．

（1）求证：$A=C$；

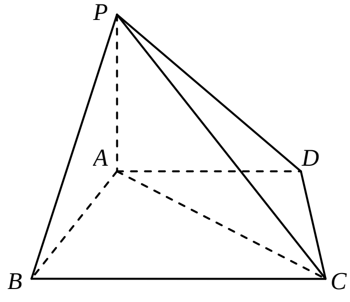
（2）若 $b=2$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，求 $\sin B$ 的值．

16．(本小题满分 14 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=60°$．

求证：（1）平面 $PAC\perp$平面 $PAB$；

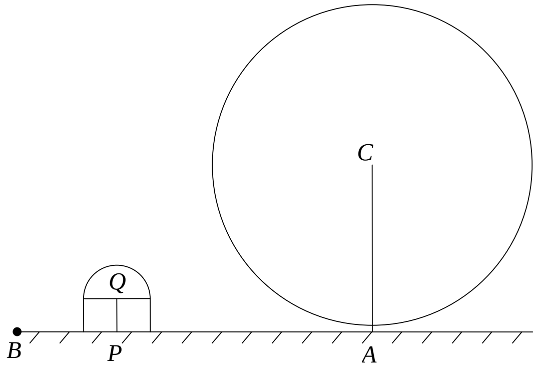
（2）设平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$，求证：$BC\parallel l$．




（第 16 题图）

17．(本小题满分 14 分)

如图，某摩天轮底座中心 $A$ 与附近的景观内某点 $B$ 之间的距离 $AB$ 为 160m．摩天轮与景观之间有一建筑物，此建筑物由一个底面半径为 15m 的圆柱体与一个半径为 15m 的半球体组成．圆柱的底面中心 $P$ 在线段 $AB$ 上，且 $PB$ 为 45m．半球体球心 $Q$ 到地面的距离 $PQ$ 为 15m．把摩天轮看作一个半径为 72m 的圆 $C$，且圆 $C$ 在平面 $BPQ$ 内，点 $C$ 到地面的距离 $CA$ 为 75m．该摩天轮匀速旋转一周需要 30min，若某游客乘坐该摩天轮(把游客看作圆 $C$ 上一点)旋转一周，求该游客能看到点 $B$ 的时长．(只考虑此建筑物对游客视线的遮挡)




（第 17 题图）

18．(本小题满分 16 分)

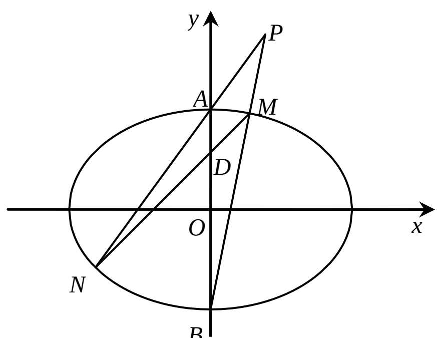
在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(1，\frac{\sqrt{2}}{2})$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$A$，$B$ 分别是椭圆 $C$ 的上、下顶点，$M$ 是椭圆 $C$ 上异于 $A$，$B$ 的一点．

（1）求椭圆 $C$ 的方程；

（2）若点 $P$ 在直线 $x-y+2=0$ 上，且$\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{BM}$，求△$PMA$ 的面积；

（3）过点 $M$ 作斜率为 1 的直线分别交椭圆 $C$ 于另一点 $N$，交 $y$ 轴于点 $D$，且 $D$ 点在线段 $OA$ 上（不包括端点 $O$，$A$），直线 $NA$ 与直线 $BM$ 交于点 $P$，求$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}$的值．




（第 18 题图）

19．(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）若函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的切线为 $y=2x+b$，求 $a$，$b$ 的值；

（2）记 $g(x)=f(x)+ax$，若函数 $g(x)$在区间$(0，\frac{1}{2})$上有最小值，求实数 $a$ 的取值范围；

（3）当 $a=0$ 时，关于 $x$ 的方程 $f(x)=bx^2$ 有两个不相等的实数根，求实数 $b$ 的取值范围.

20．(本小题满分 16 分)

数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，若存在正整数 $r$，$t$，且 $r<t$，使得 $S_r=t$，$S_t=r$ 同时成立，则称数列$\{a_n\}$为“$M(r，t)$数列”.

（1）若首项为 3，公差为 $d$ 的等差数列$\{a_n\}$是“$M(r，2r)$数列”，求 $d$ 的值；

（2）已知数列$\{a_n\}$为等比数列，公比为 $q$.

①若数列$\{a_n\}$为“$M(r，2r)$数列”，$r\leqslant 4$，求 $q$ 的值；

②若数列$\{a_n\}$为“$M(r，t)$数列”，$q\in(-1，0)$．求证：$r$ 为奇数，$t$ 为偶数.

# 江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 8

## 附加题

**21.**（本小题满分 10 分）已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

（1）求 $\boldsymbol{M}^2$;

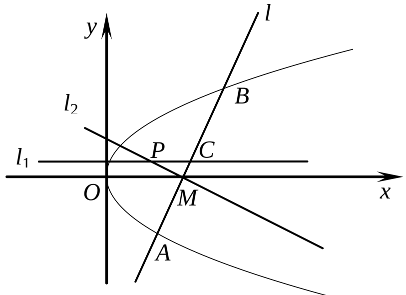
（2）求矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值和特征向量.

**22.**（本小题满分 10 分）在极坐标系中，直线 $l$ 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=1$，以极点 $O$ 为坐标原点，极轴 $Ox$ 所在的直线为 $x$ 轴建立平面直角坐标系，曲线 $C$ 的参数方程为$\begin{cases} x=r\cos\alpha+2, \\ y=r\sin\alpha-1 \end{cases}$ (其中 $\alpha$ 为参数，$r>0$)，若直线 $l$ 与曲线 $C$ 相交于 $A$，$B$ 两点，且 $AB=3$，求 $r$ 的值.

**23.**（本小题满分 10 分）平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$及点 $M(2,0)$，动直线 $l$ 过点 $M$ 交抛物线于 $A$，$B$ 两点，当 $l$ 垂直于 $x$ 轴时，$AB=4$．

（1）求 $p$ 的值；

（2）若 $l$ 与 $x$ 轴不垂直，设线段 $AB$ 中点为 $C$，直线 $l_1$ 经过点 $C$ 且垂直于 $y$ 轴，直线 $l_2$ 经过点 $M$ 且垂直于直线 $l$，记 $l_1$，$l_2$ 相交于点 $P$，求证：点 $P$ 在定直线上．



（第 22 题图）

24．(本小题满分 10 分)对由 0 和 1 这两个数字组成的字符串，作如下规定：按从左向右的顺序，当第一个子串“010”的最后一个 0 所在数位是第 $k$（$k\in$**N***，且 $k\geqslant3$）位，则称子串“010”在第 $k$ 位出现；再继续从第 $k+1$ 位按从左往右的顺序找子串“010”，若第二个子串“010” 的最后一个 0 所在数位是第 $k+m$ 位（其中 $m\geqslant3$ 且 $m\in$**N***），则称子串“010”在第 $k+m$ 位出现；……；如此不断地重复下去．如：在字符串 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 中，子串“010”在第 5 位和第 9 位出现，而不是在第 7 位和第 11 位出现．记在 $n$ 位由 0，1 组成的所有字符串中，子串“010”在第 $n$ 位出现的字符串的个数为 $f(n)$．

（1）求 $f(3)$，$f(4)$的值；

（2）求证：对任意的正整数 $n$，$f(4n+1)$是 3 的倍数．

# 江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 8 答案

## 一、填空题

1．{4，5}　　2．四　　3．30　　4．$\frac{3}{4}$　　5．－5

6．$\frac{2}{5}$　　7．$\frac{3}{4}$　　8．6　　9．－1　　10．$\sqrt{2}$

11．$\frac{1}{4}$　　12．$\frac{5\sqrt{7}}{7}$　　13．$2\sqrt{10}+2$　　14．$(-\infty，1]$

## 二、解答题

**15．** 解：（1）由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

代入 $a\cos B+b\cos A=\frac{c\cos A}{\cos C}$，得 $(\sin A\cos B+\sin B\cos A)\cos C=\sin C\cos A$，　……2 分

即 $\sin(A+B)\cos C=\sin C\cos A$．

因为 $A+B=\pi-C$，所以 $\sin(A+B)=\sin C$，

所以 $\sin C\cos C=\sin C\cos A$，　……4 分

因为 $C$ 是△$ABC$ 的内角，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos C=\cos A$．

又因为 $A$，$C$ 是△$ABC$ 的内角，所以 $A=C$．　……6 分

（2）由（1）知，因为 $A=C$，所以 $a=c$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2-2}{a^2}$．　……8 分

因为$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1$，所以 $a^2\cos B=a^2-2=1$，所以 $a^2=3$．　……10 分

所以 $\cos B=\frac{1}{3}$．　……12 分

因为 $B\in(0，\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．　……14 分

**16．** 证明：（1）因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AC$．　……2 分

因为 $AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=60°$，由余弦定理，

得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC}=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\cos60°}=\sqrt{3}$．　…4 分

因为 $1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$，即 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AC\perp AB$．　……6 分

又因为 $AC\perp PA$，且 $PA\cap AB=A$，$PA\subset$平面 $PAB$，$AB\subset$平面 $PAB$，

所以 $AC\perp$平面 $PAB$．

又 $AC\subset$平面 $PAC$，所以平面 $PAC\perp$平面 $PAB$．　……8 分

（2）因为 $BC /\!/ AD$，$AD \subset$ 平面 $PAD$，$BC \not\subset$ 平面 $PAD$，

所以 $BC /\!/$ 平面 $PAD$． ……………………………………………………10 分

又因为 $BC \subset$ 平面 $PBC$，且平面 $PBC \cap$ 平面 $PAD = l$，

所以 $BC /\!/ l$． ……………………………………………………………14 分

**17．** 解：以点 $B$ 为坐标原点，$BP$ 所在直线为 $x$ 轴，建立如图所示平面直角坐标系，

则 $B(0，0)$，$Q(45，15)$，$C(160，75)$．

过点 $B$ 作直线 $l$ 与圆 $Q$ 相切，与圆 $C$ 交于点 $M$，$N$，

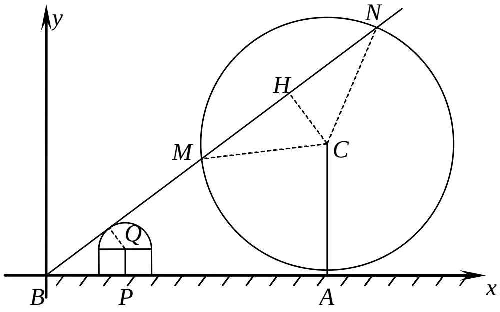
设 $l$ 的方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$，

则点 $Q$ 到 $l$ 的距离为 $\dfrac{|45k-15|}{\sqrt{k^2+1}}=15$，

解得 $k=\dfrac{3}{4}$，或 $k=0$（舍）．

所以直线 $l$ 的方程为 $y=\dfrac{3}{4}x$，即 $3x-4y=0$．

……………………………………4 分




（第 17 题图）

点 $C(160，75)$ 到 $l$ 的距离

$CH=\dfrac{|3\times160-4\times75|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=36$． ………………………………………………6 分

因为在 $\text{Rt}\triangle CHM$ 中，$CH=36$，$CM=72$，所以 $\cos\angle MCH=\dfrac{36}{72}=\dfrac{1}{2}$． ……………8 分

又因为 $\angle MCH\in(0，\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\angle MCH=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\angle MCN=2\angle MCH=\dfrac{2\pi}{3}$， ………12 分

所以所用时长为 $30\times\dfrac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=10\text{min}$． ………………………………………13 分

答：该游客能看到点 $B$ 的时长为 10min． ……………………………………14 分

**18．** 解：（1）因为椭圆过点 $(1，\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1$，$\dfrac{b^2}{a^2}=1-e^2=\dfrac{1}{2}$，解得 $a^2=2$，$b^2=1$，

所以椭圆 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$． ………………………………………………2 分

（2）由（1）知 $B(0，-1)$，设 $M(x_0，y_0)$，$P(x，y)$．

由 $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{BM}$，得 $(x，y+1)=3(x_0，y_0+1)$，

则 $x=3x_0$，$y=3y_0+2$．

又因为 $P$ 在直线 $x-y+2=0$ 上，所以 $y_0=x_0$．① ……………………………4 分

因为 $M$ 在椭圆 $C$ 上，所以$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，

将①代入上式，得 $x_0^2=\frac{2}{3}$.  ………………………………………………………6 分

所以$|x_0|=\frac{\sqrt{6}}{3}$，从而$|x_P|=\sqrt{6}$，

所以 $S_{\triangle PMA}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{6}-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.  ………………………8 分

（3）方法 1

由（1）知，$A(0，1)$，$B(0，-1)$.

设 $D(0，m)$，$0<m<1$，$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$.

因为 $MN$ 的斜率为 1，所以直线 $MN$ 的方程为：$y=x+m$，

联立方程组$\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 $y$，得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1 x_2=\frac{2m^2-2}{3}$.  ……………………………………………10 分

直线 $MB$ 的方程为：$y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$，直线 $NA$ 的方程为：$y=\frac{y_2-1}{x_2}x+1$，

联立解得 $y_P=\frac{(y_1+1)x_2+(y_2-1)x_1}{(y_1+1)x_2-(y_2-1)x_1}$.  ……………………………………………12 分

将 $y_1=x_1+m$，$y_2=x_2+m$ 代入，得

$$y_P=\frac{2x_1x_2+m(x_1+x_2)+x_2-x_1}{x_1+x_2+m(x_2-x_1)}=\frac{2\cdot\frac{2m^2-2}{3}-\frac{4m^2}{3}+(x_2-x_1)}{-\frac{4m}{3}+m(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{-\frac{4}{3}+(x_2-x_1)}{-\frac{4m}{3}+m(x_2-x_1)}=\frac{1}{m}.$$ ………………………………………………………14 分

所以$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}=(0，m)\cdot(x_P，y_P)=my_P=m\cdot\frac{1}{m}=1$.  ……………………………16 分

方法 2

$A(0，1)$，$B(0，-1)$．设 $M(x_0，y_0)$，则$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$.

因为 $MN$ 的斜率为 1，所以直线 $MN$ 的方程为：$y=x-x_0+y_0$，则 $D(0，y_0-x_0)$，

联立方程$\begin{cases} y=x-x_0+y_0, \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 $y$，得 $3x^2-4(x_0-y_0)x+2(x_0-y_0)^2-2=0$，

所以 $x_N+x_0=\dfrac{4(x_0-y_0)}{3}$，……………………………………………………………10 分

所以 $x_N=\dfrac{x_0-4y_0}{3}$，$y_N=-\dfrac{2x_0+y_0}{3}$，

所以直线 $NA$ 的方程为：$y=\dfrac{y_N-1}{x_N}x+1=\dfrac{2x_0+y_0+3}{4y_0-x_0}x+1$

直线 $MB$ 的方程为：$y=\dfrac{y_0+1}{x_0}x-1$

联立解得 $y_P=\dfrac{2{y_0}^2+{x_0}^2+x_0+2y_0}{2{y_0}^2-{x_0}^2-x_0y_0-2x_0+2y_0}$. ………………………………………12 分

又因为$\dfrac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1$，

所以 $y_P=\dfrac{2+x_0+2y_0}{(2+x_0+2y_0)(y_0-x_0)}=\dfrac{1}{y_0-x_0}$，…………………………………………14 分

所以$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OP}=(0，y_0-x_0)\ (x_P，y_P)=(y_0-x_0)\dfrac{1}{y_0-x_0}=1$. ……………………16 分

**19**．解：（1）$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}$，则 $f'(1)=1-a=2$，解得 $a=-1$，则 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}+1$，

此时 $f(1)=\ln1-1+1=0$，则切点坐标为$(1，0)$，

代入切线方程，得 $b=-2$，

所以 $a=-1$，$b=-2$. ………………………………………………………………………2 分

（2）$g(x)=f(x)+ax=\ln x+\dfrac{a}{x}+ax+1$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}+a=\dfrac{ax^2+x-a}{x^2}$.

①当 $a=0$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}>0$，则 $g(x)$在区间$(0，\dfrac{1}{2})$上为增函数，

则 $g(x)$在区间$(0，\dfrac{1}{2})$上无最小值. ……………………………………………4 分

②当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+x-a=0$ 的判别式 $\Delta=1+4a^2>0$，

则方程有两个不相等的实数根，设为 $x_1$，$x_2$，

由韦达定理得 $x_1x_2=-1$，则两根一正一负，不妨设 $x_1<0<x_2$.

设函数 $m(x)=ax^2+x-a(x>0)$，

（i）若 $a>0$，

若 $x_2\in(0，\dfrac{1}{2})$ ，则 $m(0)=-a<0$ ，$m(\dfrac{1}{2})=\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{2}-a>0$ ，解得 $0<a<\dfrac{2}{3}$.

此时 $x\in(0，x_2)$时，$m(x)<0$，则 $g(x)$递减；

$x\in(x_2,\frac{1}{2})$时，$m(x)>0$，则$g(x)$递增，

当$x=x_2$时，$g(x)$取极小值，即为最小值．

若$x_2\geqslant\frac{1}{2}$，则$x\in(0,\frac{1}{2})$，$m(x)<0$，$g(x)$在$(0,\frac{1}{2})$单调减，无最小值．

……………………………………………………………………………6 分

（ii）若$a<0$，

$x\in(0,x_2)$时，$m(x)>0$，则$g(x)$递增；

$x\in(x_2,+\infty)$时，$m(x)<0$，则$g(x)$递减，

在区间$(0,\frac{1}{2})$上，$g(x)$不会有最小值．

所以$a<0$不满足条件．

综上，当$0<a<\frac{2}{3}$时，$g(x)$在区间$(0,\frac{1}{2})$上有最小值．…………………………8 分

（3）当$a=0$时，由方程$f(x)=bx^2$，得$\ln x+1-bx^2=0$，

记$h(x)=\ln x+1-bx^2$，$x>0$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-2bx=\frac{-2bx^2+1}{x}$．

①当$b\leqslant 0$时，$h'(x)>0$恒成立，即$h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

则函数$h(x)$至多只有一个零点，即方程$f(x)=bx^2$至多只有一个实数根，

所以$b\leqslant 0$不符合题意．………………………………………………………10 分

②当$b>0$时，

当$x\in(0,\sqrt{\frac{1}{2b}})$时，$h'(x)>0$，所以函数$h(x)$递增；

当$x\in(\sqrt{\frac{1}{2b}},+\infty)$时，$h'(x)<0$，所以函数$h(x)$递减，

则$h(x)_{\max}=h(\sqrt{\frac{1}{2b}})=\ln\sqrt{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{2}$.

要使方程$f(x)=bx^2$有两个不相等的实数根，

则$h(\sqrt{\frac{1}{2b}})=\ln\sqrt{\frac{1}{2b}}+\frac{1}{2}>0$，解得$0<b<\frac{\mathrm{e}}{2}$．……………………………12 分

（i）当$0<b<\frac{\mathrm{e}}{2}$时，$h(\frac{1}{\mathrm{e}})=-\frac{b}{\mathrm{e}^2}<0$.

又$(\frac{1}{\mathrm{e}})^2-(\sqrt{\frac{1}{2b}})^2=\frac{2b-\mathrm{e}^2}{2b\mathrm{e}^2}<0$，则$\frac{1}{\mathrm{e}}<\sqrt{\frac{1}{2b}}$，

所以存在唯一的$x_1\in(\frac{1}{\mathrm{e}},\sqrt{\frac{1}{2b}})$，使得$h(x_1)=0$．…………………………14 分

（ii）$h(\frac{1}{b})=\ln\frac{1}{b}+1-\frac{1}{b}=-\ln b+1-\frac{1}{b}$，　记 $k(b)=-\ln b+1-\frac{1}{b}$，$0<b<\frac{\mathrm{e}}{2}$，

因为 $k'(b)=-\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}=\frac{1-b}{b^2}$，则 $k(b)$在$(0，1)$上为增函数，在$(1，\frac{\mathrm{e}}{2})$上为减函数，

则 $k(b)_{\max}=k(1)=0$，则 $h(\frac{1}{b})\leqslant 0$．

又$(\frac{1}{b})^2-(\sqrt{\frac{1}{2b}})^2=\frac{2-b}{2b^2}>0$，即$\frac{1}{b}>\sqrt{\frac{1}{2b}}$，

所以存在唯一的 $x_2\in(\sqrt{\frac{1}{2b}}，\frac{1}{b}]$，使得 $h(x_2)=0$，

综上，当 $0<b<\frac{\mathrm{e}}{2}$时，方程 $f(x)=bx^2$ 有两个不相等的实数根．………………16 分

**20．** 解：（1）因为$\{a_n\}$是 $M(r，2r)$数列，所以 $S_r=2r$，且 $S_{2r}=r$．

由 $S_r=2r$，得 $3r+\frac{r(r-1)}{2}d=2r$．因为 $r>0$，所以$(r-1)d=-2$ (*)；

由 $S_{2r}=r$，得 $6r+\frac{2r(2r-1)}{2}d=r$，因为 $r>0$，所以$(2r-1)d=-5$ (**)；

由(*)和(**)，解得 $r=3$，$d=-1$．………………………………………………2 分

（2）①（i）若 $q=1$，则 $S_r=ra_1$，$S_t=ta_1$．

因为$\{a_n\}$是 $M(r，2r)$数列，所以 $ra_1=2r$(*)，$2ra_1=r$(**)，

由(*)和(**)，得 $a_1=2$ 且 $a_1=\frac{1}{2}$，矛盾，所以 $q\neq 1$．…………………3 分

（ii）当 $q\neq 1$，因为$\{a_n\}$是 $M(r，2r)$数列，所以 $S_r=2r$，且 $S_{2r}=r$，

即$\frac{a_1(1-q^r)}{1-q}=2r$(*)，$\frac{a_1(1-q^{2r})}{1-q}=r$(**)，

由(*)和(**)，得 $q^r=-\frac{1}{2}$．………………………………………………5 分

当 $r=1$ 时，$q=-\frac{1}{2}$；当 $r=2$，4 时，无解；当 $r=3$ 时，$q=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$．

综上，$q=-\frac{1}{2}$或 $q=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$．………………………………………………6 分

②因为$\{a_n\}$是 $M(r，t)$数列，$q\in(-1，0)$，所以 $S_r=t$，且 $S_t=r$，

即$\frac{a_1(1-q^r)}{1-q}=t$，且$\frac{a_1(1-q^t)}{1-q}=r$，

两式作商，得$\frac{1-q^r}{1-q^t}=\frac{t}{r}$，即 $r(1-q^r)=t(1-q^t)$．……………………………8 分

（i）若 $r$ 为偶数，$t$ 为奇数，则 $r(1-|q|^r)=t(1+|q|^t)$．

因为 $r<t$，$0<1-|q|^r<1$，$1+|q|^t>1$，所以 $r(1-|q|^r)<t(1+|q|^t)$，

这与 $r(1-|q|^r)=t(1+|q|^t)$矛盾，所以假设不成立．……………………10 分

（ii）若 $r$ 为偶数，$t$ 为偶数，则 $r(1-|q|^r)=t(1-|q|^t)$．

设函数 $y=x(1-a^x)$，$0<a<1$,则 $y'=1-a^x-xa^x\ln a$，

当 $x>0$ 时，$1-a^x>0$，$-xa^x\ln a>0$，所以 $y=x(1-a^x)$在$(0,+\infty)$为增．

因为 $r<t$，所以 $r(1-|q|^r)<t(1-|q|^t)$，

这与 $r(1-|q|^r)=t(1-|q|^t)$矛盾，所以假设不成立．……………………12 分

(iii) 若 $r$ 为奇数，$t$ 为奇数，则 $r(1+|q|^r)=t(1+|q|^t)$．

设函数 $y=x(1+a^x)$，$0<a<1$,则 $y'=1+a^x+xa^x\ln a$．

设 $g(x)=1+a^x+xa^x\ln a$，则 $g'(x)=a^x\ln a(2+x\ln a)$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{2}{\ln a}$．因为 $a^x>0$，$\ln a<0$，

所以当 $x>-\dfrac{2}{\ln a}$，$g'(x)>0$，则 $g(x)$在区间$(-\dfrac{2}{\ln a},+\infty)$递增；

当 $0<x<-\dfrac{2}{\ln a}$，$g'(x)<0$，则 $g(x)$在区间$(0,-\dfrac{2}{\ln a})$递减，

所以 $g(x)_{\min}=g(-\dfrac{2}{\ln a})=1-a^{-\frac{2}{\ln a}}$．

因为$-\dfrac{2}{\ln a}>0$，所以 $a^{-\frac{2}{\ln a}}<1$， 所以 $g(x)_{\min}>0$，

从而 $g(x)>0$ 在$(0,+\infty)$恒成立，

所以 $y=x(1+a^x)$，$0<a<1$ 在$(0,+\infty)$上单调递增．

因为 $r<t$，所以 $r(1+|q|^r)<t(1+|q|^t)$，

这与 $r(1-|q|^r)=t(1-|q|^t)$矛盾，所以假设不成立．……………………14 分

(iv) 若 $r$ 为奇数，$t$ 为偶数．

由①知，存在等比数列$\{a_n\}$为“$M(1,2)$数列”．

综上，$r$ 为奇数，$t$ 为偶数．……………………………………………………16 分

# 江苏省仪征中学 2019 届高三下学期数学周末限时训练 8 **附加题答案**

**21．** 解：（1） $\boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&4\\4&5\end{bmatrix}$．  4 分

（2）矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$． ……………………………………6 分

①当 $\lambda=1$ 时，$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，得$\begin{cases}x+y=0,\\x+y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-1$，于是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. ………………8 分

②当 $\lambda=3$ 时，$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，得$\begin{cases}x-y=0,\\x-y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=1$，于是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

因此，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为 1，3，分别对应一个特征向量为$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. …10 分

**22．** 解：直线 $l$ 的直角坐标方程为：$x-\sqrt{3}y-2=0$．  2 分

曲线 $C$ 的普通方程为：$(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$．…………………………………………4 分

圆心 $C(2，-1)$到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{|2+\sqrt{3}-2|}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ……………………………6 分

所以 $r=\sqrt{d^2+(\dfrac{AB}{2})^2}=\sqrt{3}$．…………………………………………………10 分

**23．** 解：（1）因为 $l$ 过 $M(2，0)$，且当 $l$ 垂直于 $x$ 轴时，$AB=4$，

所以抛物线经过点(2，2)，

代入抛物线方程，得 $4=2p\times2$，解得 $p=1$．…………………………………… 2 分

（2）设直线 $l$ 方程为：$y=k(x-2)(k\neq0)$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

联立$\begin{cases}y^2=2x,\\y=k(x-2),\end{cases}$消去 $x$，得 $ky^2-2y-4k=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{2}{k}$，$y_1y_2=-4$． ………………………………………………………4 分

因为 $C$ 为 $AB$ 中点，所以 $y_C=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{1}{k}$，

则直线 $l_1$ 方程为：$y=\dfrac{1}{k}$. ………………………………………………………6 分

因为直线 $l_2$ 过点 $M$ 且与 $l$ 垂直，则 $l_2$ 方程为：$y=-\dfrac{1}{k}(x-2)$，

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{k}, \\ y=-\dfrac{1}{k}(x-2), \end{cases}$ ……………………………………………………………8 分

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=\dfrac{1}{k}, \end{cases}$ 即 $P(1，\dfrac{1}{k})$，

所以，点 $P$ 在定直线 $x=1$ 上． ……………………………………………………10 分

**24．** 解：（1）在 3 位数字符串中，子串“010”在第 3 位出现有且只有 1 个，即 010，

所以 $f(3)=1$． ……………………………………………………………………………2 分

在 4 位数字符串中，子串“010”在第 4 位出现有 2 个，即 0010 与 1010，

所以 $f(4)=2$． ……………………………………………………………………………4 分

（2）当 $n\geqslant 5$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$时，当最后 3 位是 010 时，前 $n-3$ 个数位上，每个数位上的数字都有两种可能，即 0 和 1，所以共有 $2^{n-3}$ 种可能．

由于当最后 3 位是 010 时，若最后 5 位是 01010，且前 $n-2$ 位形成的字符串中是子串“010”是在第 $n-2$ 位出现，此时不满足条件．

所以 $f(n)=2^{n-3}-f(n-2)$，$n\geqslant 5$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$． ……………………………………6 分

因为 $f(3)=1$，所以 $f(5)=3$.

下面用数学归纳法证明 $f(4n+1)$是 3 的倍数．

①当 $n=1$ 时，$f(5)=3$ 是 3 的倍数；

②假设当 $n=k(k\in\mathbf{N^*})$时，$f(4k+1)$是 3 的倍数，

那么当 $n=k+1$ 时，

$$f[4(k+1)+1]=f(4k+5)=2^{4k+2}-f(4k+3)$$

$$=2^{4k+2}-[2^{4k}-f(4k+1)]=3\times 2^{4k}+f(4k+1)．$$ ·····8 分

因为 $f(4k+1)$是 3 的倍数，且 $3\times 2^{4k}$ 也是 3 的倍数，所以 $f(4k+5)$ 是 3 的倍数．

这就是说，当 $n=k+1$ 时，$f[4(k+1)+5]$ 是 3 的倍数．

由①，②可知，对任意的正整数 $n$，$f(4n+1)$是 3 的倍数． ……………………………10 分