对“切线法”证明不等式的一种新拓展

储百六

（安徽省岳西中学 246600）

“切线法”作为不等式证明的一种常用方法，稍有解题经验的人都会有所了解，但笔者从以往的文献（如文[1]、文[2]）中发现，用切线法处理的问题大多是形如“满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=s$，证明 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant C(\leqslant C)$”的一类对称的条件不等式，那么不对称的不等式是否也可用切线法来证明呢？笔者通过探究发现是可行的，本文结合实例，对该方法介绍如下：

定理 1 (1)若 $f(x)$在区间 D 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，则对任意 $x,x_0\in D$，有 $f(x)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$；

(2)若 $f(x)$ 在区间 D 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，则对任意 $x,x_0\in D$，有 $f(x)\leqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

该结论较为常见，故将证明略去.

注 (1)(2)的几何意义是凸(凹)函数的图像在其切线的上(下)方.

定理 2 (1) 已知 $f(x)$是区间 D 上二阶可导的凸函数，对任意 $x_i\in D(i=1,2,\cdots,n)$，若存在一组数 $y_i\in D(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cdot f'(y_i)(x_i-y_i)=0$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_if(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_if(y_i)\ ;$$

(2)已知 $f(x)$是区间 D 上二阶可导的的凹函数，对任意 $x_i\in D(i=1,2,\cdots,n)$，若存在一组数 $y_i\in D(i=1,2,\cdots,n)$，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_if'(y_i)(x_i-y_i)=0$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_if(x_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_if(y_i)\ .$$

证明 (1)因为 $f(x)$为凸函数，由定理 1 知，对任意 $x_i,y_i\in D$，有

$$f(x_i)\geqslant f'(y_i)(x_i-y_i)+f(y_i),$$

于是 $a_if(x_i)\geqslant a_if'(y_i)(x_i-y_i)+a_if(y_i)$，

将这 n 个式子累加可得

$$\sum_{i=1}^{n}a_if(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_if'(y_i)(x_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}a_if(y_i),$$

又因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_if'(y_i)(x_i-y_i)=0$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_if(x_i)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_if(y_i)$，得证.

(2)可类似证明凹函数的情况，此处略.

注 若令 $y_1=y_2=\cdots=y_n=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$，定理 2 即为加权的 Jensen 不等式.

下面举例来说明这种方法，相信读者能从中得到启发.

例 1 已知 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$为常数，$x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$且 $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i=s$，求证：

当 $n<0$ 或 $n>1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{k}a_ix_i^n$ 的最小值为 $\dfrac{s^n}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}}$；

当 $0<n<1$ 时，$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^n$ 的最大值为$\dfrac{s^n}{\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}}$.

证明 令 $f(x)=x^n$，当 $n<0$ 或 $n>1$ 时，

因为 $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$，

于是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数，

依照定理 2，下面寻找一组正数 y_i，

使得 $\sum_{i=1}^{n} a_i f'(y_i)(x_i-y_i)=0$，

令$\begin{cases} a_1 f'(y_1)=a_2 f'(y_2)=\cdots=a_k f'(y_k)=t \\ y_1+y_2+\cdots+y_k=x_1+x_2+\cdots+x_k=s \end{cases}$，

可推出 $y_i^{n-1}=\left(\dfrac{t}{na_i}\right)$，$\dfrac{t}{n}=\dfrac{s^{n-1}}{\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}}$，

所以 $\sum_{i=1}^{k} a_i x_i^n$ 的最小值为

$$\sum_{i=1}^{k} a_i y_i^n=\sum_{i=1}^{k} a_i y_i^{n-1} y_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{t}{n} y_i=\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{k} y_i$$

$$=\frac{ts}{n}=\frac{s^n}{\left(\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{a_i^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}}.$$

当 $0<n<1$ 时的证明与 $n<0$ 或 $n>1$ 时相类似，此处略.

注 例 1 与郭要红老师在文[3]中用 Hölder 不等式得到的推广 3 结果一致.

例 2 设 x,y,z 均为正实数，k_0 为方程 $2xyzk^3+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)k^2-x^2y^2z^2=0$ 的正根，则对于任意△ABC，有

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C$$
$$\leqslant\sqrt{x^2-k_0^2}+\sqrt{y^2-k_0^2}+\sqrt{z^2-k_0^2},$$

当且仅当 $\cos A=\dfrac{k_0}{x}$，$\cos B=\dfrac{k_0}{y}$，$\cos C=\dfrac{k_0}{z}$ 取等号.

证明 令 $f(x)=\sin x$，$x\in(0,\pi)$，

因为 $f''(x)=-\sin x<0$，

由定理 1 可知对 $X,A_i\in(0,\pi)$，

$\sin x\leqslant\cos A_i(X-A_i)+\sin A_i$，

所以 $x\sin A\leqslant x\cos A_1(A-A_1)+x\sin A_1$，

$y\sin B\leqslant y\cos B_1(B-B_1)+y\sin B_1$，

$z\sin C\leqslant z\cos C_1(C-C_1)+z\sin C_1$；

令 $x\cos A_1=y\cos B_1=z\cos C_1=k_0$ 且

$A+B+C=A_1+B_1+C_1=\pi$，

由三角形中熟知的恒等式

$\cos^2 A_1+\cos^2 B_1+\cos^2 C_1+2\cos A_1\cos B_1\cos C_1=1$

可得$\dfrac{k_0^2}{x^2}+\dfrac{k_0^2}{y^2}+\dfrac{k_0^2}{z^2}+\dfrac{2k_0^3}{xyz}=1$，

即 $2xyzk_0^3+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)k_0^2-x^2y^2z^2=0$，

令 $g(k)=2xyzk^3+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)k^2-x^2y^2z^2$，

显然 $g(k)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

又 $g(0)=-x^2y^2z^2<0$，

$g(x),g(y),g(z)$ 均大于 0，

由零点定理可知存在符合条件的唯一正根 k_0，

且 $k_0<x$，$k_0<y$，$k_0<z$.

于是将上述三个不等式相加可得

$$x\sin A+y\sin B+z\sin C$$
$$\leqslant x\sin A_1+y\sin B_1+z\sin C_1$$
$$=\sqrt{x^2-k_0^2}+\sqrt{y^2-k_0^2}+\sqrt{z^2-k_0^2}.$$

注 本题是 2011 年大学生数学竞赛试题的推广，原题为："在△ABC 中，求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 的最大值". 在文[4][5][6]中给出了它的其它各种证法，也用柯西不等式给出了它的另一推广，但配凑需要很好的技巧，读者可自行查看.

例 3 在△ABC 中，求证：

$$\sin A\sin B\sin 2C\leqslant\frac{1}{54}(5\sqrt{13}-1)\sqrt{4+\sqrt{13}}.$$

证明 当 C 为钝角时，显然成立.

当 C 为锐角时，考查函数 $f(x)=\ln\sin x$，$g(x)=\ln\sin 2x$ 的凸性，

因为 $f''(x)=-(1+\cot^2 x)<0$，

$g''(x)=-4(1+\cot^2 2x)<0$，

由定理 1 可知对任意的 $x_1,x_2\in(0,\pi)$，$x_3\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，有

$$\ln\sin A\leqslant\frac{1}{\tan x_1}(A-x_1)+\ln\sin x_1,$$

$$\ln\sin B \leqslant \frac{1}{\tan x_2}(B-x_1)+\ln\sin x_2,$$

$$\ln\sin 2C \leqslant \frac{2}{\tan 2x_3}(C-x_3)+\ln\sin 2x_3,$$

令 $\tan x_1=\tan x_2=\frac{1}{2}\tan 2x_3=k$ 且

$$A+B+C=x_1+x_2+x_3=\pi,$$

由三角形中常见恒等式

$$\tan x_1+\tan x_2+\tan x_3=\tan x_1\tan x_2\tan x_3$$

可得

$$2k+\frac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k}=k^2\cdot\frac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k},$$

解得 $k^2=4+\sqrt{13}$，

所以 $\ln\sin A+\ln\sin B+\ln\sin 2C$

$$\leqslant \ln\sin x_1+\ln\sin x_2+\ln\sin 2x_3,$$

于是 $\sin A\sin B\sin 2C$

$$\leqslant \sin x_1\sin x_2\sin 2x_3=\frac{k^2}{k^2+1}\sqrt{\frac{4k^2}{4k^2+1}}$$

$$=\frac{1}{54}(5\sqrt{13}-1)\sqrt{4+\sqrt{13}}.$$

注 此不等式来自文[7]，利用此方法还可类似证明出文[6]中的另外两个不等式：

(1)在$\triangle ABC$中，有

$$\sin\frac{A}{4}\sin\frac{B}{4}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{54}(5\sqrt{10}-14);$$

(2)在$\triangle ABC$中，有

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin C\leqslant\frac{1}{54}(5\sqrt{13}-1)\sqrt{4-\sqrt{13}}.$$

读者可自行证之.

例 4 已知 a,b,c 为正实数，求证：

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{a+b}\left(\frac{2b}{b+c}\right)^{b+c}\left(\frac{2c}{c+a}\right)^{c+a}\leqslant 1.$$

证明 设 $f(x)=\ln x$，因为

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,$$

由定理 1 可得对任意 $x,x_i\in(0,+\infty)$，有

$$\ln x\leqslant\frac{1}{x_i}(x-x_i)+\ln x_i,$$

所以 $\begin{cases}\ln a\leqslant\frac{1}{x_1}(a-x_1)+\ln x_1\\ \ln b\leqslant\frac{1}{x_2}(b-x_2)+\ln x_2\\ \ln c\leqslant\frac{1}{x_3}(c-x_3)+\ln x_3\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}(a+b)\ln a\leqslant\frac{a+b}{x_1}(a-x_1)+(a+b)\ln x_1,\\ (b+c)\ln b\leqslant\frac{b+c}{x_2}(b-x_2)+(b+c)\ln x_2,\\ (c+a)\ln c\leqslant\frac{c+a}{x_3}(c-x_3)+(c+a)\ln x_3,\end{cases}$$

令 $\frac{a+b}{x_1}=\frac{b+c}{x_2}=\frac{c+a}{x_3}=k$ 且

$$x_1+x_2+x_3=a+b+c,$$

解得 $k=2,x_1=\frac{a+b}{2},x_2=\frac{b+c}{2},x_3=\frac{c+a}{2}$，

代入上述三个不等式再累加可得

$$(a+b)\ln a+(b+c)\ln b+(c+a)\ln c$$

$$\leqslant(a+b)\ln x_1+(b+c)\ln x_2+(c+a)\ln x_3,$$

整理得 $\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{a+b}\left(\frac{2b}{b+c}\right)^{b+c}\left(\frac{2c}{c+a}\right)^{c+a}\leqslant 1.$

从以上例子中可看出，本文的方法极大的拓展了切线法，使其不仅可解决对称不等式问题，也可解决不对称的不等式问题. 此法非常类似于拉格朗日乘数法，能将多元函数的极值问题转化为解方程组的问题，将不等式转化为等式来解决.

参考文献

[1]郭子伟. 例谈不等式证明中的“切线法”及其拓展[J]. 人教网刊数学空间，2013(3)

[2]程汉波. 对“构造切线法”证明不等式的一点改进[J]. 数学教学，2013(9)：32－34

[3]郭要红，崔凤仙. 一个最值问题的研讨[J]. 数学通报，2012(8)：45－46

[4]王永喜等. 一道全国大学生数学竞赛试题的解法及推广[J]. 大学数学，2015(6)：90－95

[5]魏定波. 一道大学生数学竞赛题的初等方法探究[J]. 中学数学研究(广东)，2014(7)：43－44

[6]杨育池. 一道大学生数学竞赛题的初等解法[J]. 中学数学教学，2012(1)：41－44

[7]董林，霍立学. Amer 不等式的证明及其类似[J]. 数学通讯(下半月)，2017(6)：39－40