江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学

周三练习（12） 2018. 12. 5

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式、数列

一. 填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1. 已知集合 $A=\left(-\infty,m\right],B=\left(1,2\right]$，若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围为______.

2. 命题“$\exists x\in\left[0,1\right],x^2-1\geq 0$”是________命题.（选填“真”或“假”）

3. 复数 $z=\left(1+2i\right)^2$，其中 i 为虚数单位，则 z 的实部为_________.

4. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2\log_6 x}$ 的定义域为_____.

5. “$\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$”是“$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in Z)$”成立的_________条件.

6. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1+a_2^2=-3$，$S_5=10$，则 a_9 的值是_____.

7. 等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的各项均为实数，其前 n 项和为 S_n. 已知 $S_3=\dfrac{7}{4}$，$S_6=\dfrac{63}{4}$，则 a_8 的值是_____.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m^2+4}=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则 m 的值为_____.

9. 设 $P(x,y)$ 是圆 $C:\left(x-2\right)^2+y^2=1$ 上任意一点，则 $\left(x-5\right)^2+\left(y+4\right)^2$ 的最大值为_____.

10. 设 α 为锐角，若 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{4}{5}$，则 $\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{12})$ 的值为_____.

11. 若 ΔABC 满足 $a(b\cos B-c\cos C)=(b^2-c^2)\cos A$，则 ΔABC 的形状是_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$，右焦点为 F，

右准线为 l，短轴的一个端点为 B，设原点到直线 BF 的距离为 d_1，F 到 l 的距离为 d_2，若 $d_2=\sqrt{6}d_1$，

则椭圆 C 的离心率为__________.

13. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4, AD=2, \angle A=\dfrac{\pi}{3}$ ，M 为 DC 的中点，N 为平面 $ABCD$ 内一点，若 $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NB}\right|=\left|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\right|$ ，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=$ _________.

14. 已知 x，y 是正实数，且 $x^2+4xy+4y^2=1$，则 $\dfrac{1+2y^2}{xy}$ 的最小值为_________.

二. 解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. 在 ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

（1）求证：$\tan B=3\tan A$；

（2）若 $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求 A 的值.

16. 已知 $a\in R$，函数 $f\left(x\right)=x^2-2ax+5$

(1) 若不等式 $f\left(x\right)>0$ 对任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围;

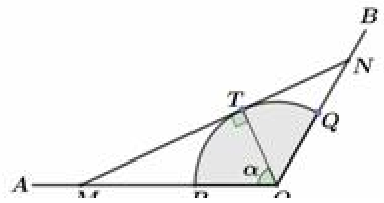
(2) 若 $a>1$，且函数 $f\left(x\right)$ 的定义域和值域均为 $\left[1,a\right]$，求实数 a 的值.

17. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，$a_1=-1,b_1=1$，$a_2+b_2=2$.

(1)若$a_3+b_3=5$，求$\{b_n\}$的通项公式;

(2)若$T_3=21$，求S_3.

18. 如图，射线OA和OB均为笔直的公路，扇形OPQ区域（含边界）是规划的生态文旅园区，其中P、Q分别在射线OA和OB上。经测量得，扇形OPQ的圆心角（即$\angle POQ$）为$\frac{2\pi}{3}$、半径为3千米。根据发展规划，要在扇形OPQ区域外修建一条公路MN，分别与射线OA、OB交于M、N两点，并要求MN与扇形弧PQ相切于点T（T不与P，Q重合）。设$\angle POT=\alpha$（单位：弧度），假设所有公路的宽度均忽略不计。



（Ⅰ）试将公路MN的长度表示为α的函数;

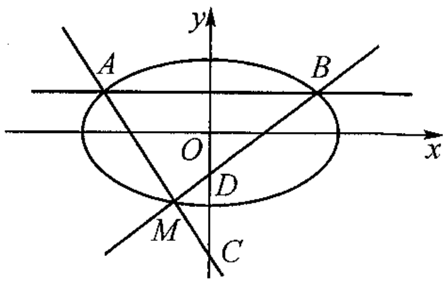
（Ⅱ）已知公路每千米的造价为2000万元，问建造这样一条公路MN，至少要投入多少万元?

19. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，左焦点 $F\left(-2,0\right)$，直线 $l:y=t$ 与椭圆交于 A，B 两点，M 为椭圆上异于 A，B 的点.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若 $M\left(-\sqrt{6},-1\right)$，以 AB 为直径的圆 P 过 M 点，求圆 P 的标准方程；

（3）设直线 MA，MB 与 y 轴分别交于 C，D，证明：$OC\cdot OD$ 为定值.



20. 已知数列 $\left\{a_n\right\}$，其前 n 项和为 S_n，满足 $a_1=2$，$S_n=\lambda na_n+\mu a_{n-1}$，其中 $n\geq 2$，$n\in N^*$，λ，$\mu\in R$.

(1)若 $\lambda=0$，$\mu=4$，$b_n=a_{n+1}-2a_n(n\in N^*)$，求证：数列 $\left\{b_n\right\}$ 是等比数列；

(2)若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等比数列，求 λ，μ 的值；

(3)若 $a_2=3$ 且 $\lambda+\mu=32$，求证：数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列。

周三练习（12）参考答案

一、 填空题

1. $[2,+\infty)$　2. 真　3. -3　4. $(0,\sqrt{6}]$　5. 必要不充分　6. 20　7. 32

8. 2　9. 36　10. $\dfrac{17\sqrt{2}}{50}$　11. 直角或等腰三角形　12. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　13. 6

14. $4+2\sqrt{6}$

解答： 解：∵x，y是正实数，且$x^2+4xy+4y^2=1$，

则 $\dfrac{1+2y^2}{xy}=\dfrac{x^2+4xy+6y^2}{xy}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{6y}{x}+4\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{6y}{x}}+4=2\sqrt{6}+4$，当且仅当$x=\sqrt{6}y=3-\sqrt{6}$时取等号.

∴ $\dfrac{1+2y^2}{xy}$ 的最小值为$4+2\sqrt{6}$.

二、解答题

15.解：（1）∵ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，∴ $AB\cdot AC\cdot\cos A=3BA\cdot BC\cdot\cos B$，即 $AC\cdot\cos A=3BC\cdot\cos B$。

由正弦定理，得 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，∴ $\sin B\cdot\cos A=3\sin A\cdot\cos B$。

又∵ $0<A+B<\pi$，∴ $\cos A>0$，$\cos B>0$。∴ $\dfrac{\sin B}{\cos B}=3\cdot\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 即 $\tan B=3\tan A$。

（2）∵ $\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}, 0<C<\pi$，∴ $\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$。∴ $\tan C=2$。

∴ $\tan\left[\pi-(A+B)\right]=2$，即 $\tan(A+B)=-2$。∴ $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=-2$。

由（1），得 $\dfrac{4\tan A}{1-3\tan^2 A}=-2$，解得 $\tan A=1,\ \tan A=-\dfrac{1}{3}$。

∵ $\cos A>0$，∴ $\tan A=1$。∴ $A=\dfrac{\pi}{4}$。

16. 解:(1)①若 $\triangle=4a^2-20<0$,即 $-\sqrt{5}<a<\sqrt{5}$ 时，$f(x)>0$ 恒成立,符合题意,

②若 $\triangle=4a^2-20=0$,即 $a=\pm\sqrt{5}$ 时, $f(x)=0$ 的解为 $x=a$,

∵不等式 $f(x)>0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立, ∴$a=-\sqrt{5}$.

②如 $\triangle=4a^2-20>0$,即 $a<-\sqrt{5}$ 或 $a>\sqrt{5}$ 时,设 $f(x)=0$ 的两根为 x_1, x_2,则 $x_1x_2=5>0$,

∵ $f(x)>0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,

∴$f(x)=0$ 有两个负根, ∴$x_1+x_2=2a<0$, ∴$a<-\sqrt{5}$.

综上,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{5})$.

(2) $\because f(x)$ 的图象开口向上,对称轴为 $x=a$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1,a]$ 上单调递减,$\therefore f(1)=a$,即 $6-2a=a$,解得 $a=2$.

17.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

$a_1=-1,b_1=1,a_2+b_2=2,a_3+b_3=5$，

可得$-1+d+q=2,-1+2d+q^2=5$，

解得 $d=1,q=2$ 或 $d=3,q=0$(舍去)，

则$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$，$n\in N^*$；

(2)$b_1=1,T_3=21$，

可得 $1+q+q^2=21$，解得 $q=4$ 或-5，

当 $q=4$ 时,$b_2=4,a_2=2-4=-2$，$d=-2-(-1)=-1,S_3=-1-2-3=-6$；

当 $q=-5$ 时,$b_2=-5,a_2=2-(-5)=7$，$d=7-(-1)=8,S_3=-1+7+15=21$.

18. 解：(Ⅰ) 因为 MN 与扇形弧 PQ 相切于点 T，所以 $OT\perp MN$． 在 $RT\Delta OTM$ 中，因为 $OT=3$，

所以 $MT=3\tan\alpha$，在 $RT\Delta OTN$ 中，$\angle NOT=\frac{2\pi}{3}-\alpha$，所以 $NT=3\tan(\frac{2\pi}{3}-\alpha)$，

所以 $MN=3\tan\alpha+3\tan(\frac{2\pi}{3}-\alpha)$ (千米)，其中 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

(Ⅱ) $MN=3\tan\alpha+3\tan(\frac{2\pi}{3}-\alpha)=3(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha)}{\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)})$

$$=3(\frac{\sin\alpha\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)+\cos\alpha\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha)}{\cos\alpha\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)})=\frac{3\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3}-\alpha)}{\cos\alpha\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cos\alpha\cos(\frac{2\pi}{3}-\alpha)}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{\cos\alpha(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha)}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}},$$

因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，$\therefore 2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时，MN 取最小值 $6\sqrt{3}$，

$\therefore$ 建造这样一条公路 MN，至少要投入 $2000\times6\sqrt{3}=12000\sqrt{3}$ 万元.

19. 解：（1）因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $c=2$，所以 $a=2\sqrt{2}, b=2$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设 $A(s,t)$，则 $B(-s,t)$，且 $s^2+2t^2=8$ ①

因为以 AB 为直径的圆 P 过 M 点，所以 $MA\perp MB$，所以 $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=0$

又 $\overline{MA}=(s+\sqrt{6},t+1), \overline{MB}=(-s+\sqrt{6},t+1)$，所以 $6-s^2+(t+1)^2=0$ ②

由①②解得：$t=\frac{1}{3}$，或 $t=-1$（舍），所以 $s^2=\frac{70}{9}$.

又圆 P 的圆心为 AB 的中点 $(0,t)$，半径为 $\frac{AB}{2}=|s|$，

所以圆 P 的标准方程为 $x^2+(y-\frac{1}{3})^2=\frac{70}{9}$.

(3)设 $M(x_0,y_0)$，则的方程为 $y-y_0=\frac{t-y_0}{s-x_0}(x-x_0)$，若 k 不存在，显然不符合条件.

令 $x=0$ 得 $y_c=\frac{tx_0-sy_0}{s-x_0}$；同理 $y_D=\frac{-tx_0-sy_0}{-s-x_0}$

所以 $OC\cdot OD=|y_c\cdot y_D|=\left|\frac{tx_0-sy_0}{s-x_0}\cdot\frac{-tx_0-sy_0}{-s-x_0}\right|=\left|\frac{t^2{x_0}^2-s^2{y_0}^2}{s^2-{x_0}^2}\right|$

$=\left|\frac{t^2(8-2{y_0}^2)-(8-2t^2){y_0}^2}{(8-2{y_0}^2)-(8-2t^2)}\right|=\left|\frac{8t^2-8{y_0}^2}{2t^2-2{y_0}^2}\right|=4$ 为定值.

20.解：(1)证明：若 $\lambda=0,\mu=4$,则当 $Sn=4an-1(n\geq 2)$，

所以 $an+1=Sn+1-Sn=4(an-an-1)$，

即 $an+1-2an=2(an-2an-1)$，所以 $bn=2bn-1$，

又由 $a1=2,a1+a2=4a1$，得 $a2=3a1=6,a2-2a1=2\neq 0$,即 $bn\neq 0$，

所以 $bnbn-1=2$，

故数列$\{bn\}$是等比数列。

(2)若$\{an\}$是等比数列,设其公比为 $q(q\neq 0)$，

当 $n=2$ 时,$S2=2\lambda a2+\mu a1$，即 $a1+a2=2\lambda a2+\mu a1$，得 $1+q=2\lambda q+\mu$，①

当 $n=3$ 时,$S3=3\lambda a3+\mu a2$,即 $a1+a2+a3=3\lambda a3+\mu a2$，得 $1+q+q2=3\lambda q2+\mu q$，②

当 $n=4$ 时,$S4=4\lambda a4+\mu a3$,即 $a1+a2+a3+a4=4\lambda a4+\mu a3$，得 $1+q+q2+q3=4\lambda q3+\mu q2$，③

②−①×q,得 $1=\lambda q2$，

③−②×q,得 $1=\lambda q3$，

解得 $q=1$，$\lambda=1$.

代入①式，得 $\mu=0$.

此时 $Sn=nan,(n\geq 2)$，

所以 $a1=2,\{an\}$是公比为 1 的等比数列，故 $\lambda=1$，$\mu=0$.

(3)证明：若 $a2=3$,由 $a1+a2=2\lambda a2+\mu a1$，得 $5=6\lambda+2\mu$，

又 $\lambda+\mu=32$,解得 $\lambda=12$，$\mu=1$.

由 $a1=2,a2=3,\lambda=12,\mu=1$,代入 $Sn=\lambda nan+\mu an-1$ 得 $a5=4$，所以 $a1,a2,a3$ 成等差数列，

由 $Sn=n2an+an-1$,得 $Sn+1=n+12an+1+an$，

两式相减得：$an+1=n+12an+1-n2an+an-an-1$，

即$(n-1)an+1-(n-2)an-2an-1=0$，

所以 $nan+2-(n-1)an+1-2an=0$，

相减得：$nan+2-2(n-1)an+1+(n-2)an-2an+2an-1=0$，

所以 $n(an+2-2an+1+an)+2(an+1-2an+an-1)=0$，

所以 $an+2-2an+1+an=-2n(an+1-2an+an-1)$

$=22n(n-1)(an-2an-1+an-2)=\ldots=(-2)n-1n(n-1)\ldots2(a3-2a2+a1)$

因为 $a3-2a2+a1=0$，所以 $an+2-2an+1+an=0$，即数列$\{an\}$是等差数列。