

江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§7.2 直线、平面平行的判定与性质

研制人：雷成才 审核人：陈宏强

班级：_____ 姓名：_____ 学号：_____ 授课日期：_____

- ①以立体几何的定义、公理和定理为出发点，认识和理解空间中线面平行的有关性质与判定定理.
- ②能运用公理、定理和已获得的结论证明一些有关空间图形的平行关系的简单命题.
- ③从定义和公理出发，借助长方体，通过直观感知，了解空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行关系，并加以证明.

课前热身

1. 下列说法中与“直线 $a \parallel$ 平面 α ”等价的是()

- A. 直线 a 上有无数个点不在平面 α 内
- B. 直线 a 与平面 α 内的所有直线平行
- C. 直线 a 与平面 α 内无数条直线不相交
- D. 直线 a 与平面 α 内的任意一条直线都不相交

解析 因为 $a \parallel$ 平面 α ，所以直线 a 与平面 α 无交点，因此 a 和平面 α 内的任意一条直线都不相交，故选 D.

答案 D

2. (新教材必修第二册 P142T2 改编)平面 $\alpha \parallel$ 平面 β 的一个充分条件是()

- A. 存在一条直线 a ， $a \parallel \alpha$ ， $a \parallel \beta$
- B. 存在一条直线 a ， $a \subset \alpha$ ， $a \parallel \beta$
- C. 存在两条平行直线 a ， b ， $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \alpha$
- D. 存在两条异面直线 a ， b ， $a \subset \alpha$ ， $b \subset \beta$ ， $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \alpha$

解析 若 $\alpha \cap \beta = l$ ， $a \parallel l$ ， $a \not\subset \alpha$ ， $a \not\subset \beta$ ， $a \parallel \alpha$ ， $a \parallel \beta$ ，故排除 A；

若 $\alpha \cap \beta = l$ ， $a \subset \alpha$ ， $a \parallel l$ ，则 $a \parallel \beta$ ，故排除 B；

若 $\alpha \cap \beta = l$ ， $a \subset \alpha$ ， $a \parallel l$ ， $b \subset \beta$ ， $b \parallel l$ ，则 $a \parallel \beta$ ， $b \parallel \alpha$ ，故排除 C；

故选 D.

答案 D

3. 若平面 $\alpha \parallel$ 平面 β ，直线 $a \parallel$ 平面 α ，点 $B \in \beta$ ，则在平面 β 内且过 B 点的所有直线中()

- A. 不一定存在与 a 平行的直线
- B. 只有两条与 a 平行的直线
- C. 存在无数条与 a 平行的直线

D.存在唯一与 a 平行的直线

解析 当直线 a 在平面 β 内且过 B 点时, 不存在与 a 平行的直线, 故选 A.

答案 A

4. (多选) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 下列结论正确的是()

A. $AD_1 \parallel BC_1$

B. 平面 $AB_1D_1 \parallel$ 平面 BDC_1

C. $AD_1 \parallel DC_1$

D. $AD_1 \parallel$ 平面 BDC_1

ABD

5. 如图是长方体被一平面所截得的几何体, 四边形 $EFGH$ 为截面, 则四边形 $EFGH$ 的形状为_____.

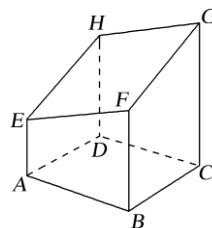
解析 $\because$ 平面 $ABFE \parallel$ 平面 $DCGH$,

又平面 $EFGH \cap$ 平面 $ABFE = EF$,

平面 $EFGH \cap$ 平面 $DCGH = HG$,

$\therefore EF \parallel HG$. 同理 $EH \parallel FG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.



答案 平行四边形

6. 已知直线 a, b 和平面 α, β , 若 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel \beta, b \parallel \beta$, 则 α, β 的位置关系是_____.

答案 平行或相交

知识梳理

1. 线面平行的判定定理与性质定理

2. 面面平行的判定定理与性质定理

典例研究

考点一 与线、面平行相关命题的判定

例 1. 设 a, b, c 表示不同直线, α, β 表示不同平面, 给出下列命题:

①若 $a \parallel c, b \parallel c$, 则 $a \parallel b$; ②若 $a \parallel b, b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel \alpha$;

③若 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$, 则 $a \parallel b$.

其中真命题的个数是()

A.0 B.1 C.2 D.3

(2)(2020 苏州一模)设 m, n 是空间中两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列说法正确的是()

A.若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$

B.若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$

C.若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \perp \beta$

D.若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel \beta, n \parallel \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$

解析 (1)对于①, 根据线线平行的传递性可知①是真命题; 对于②, 由 $a \parallel b, b \parallel \alpha$, 可以推出 $a \parallel \alpha$ 或 $a \subset \alpha$, 故②是假命题; 对于③, 根据 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$, 可以推出 a 与 b 平行、相交或异面, 故③是假命题. 所以真命题的个数是 1. 故选 B.

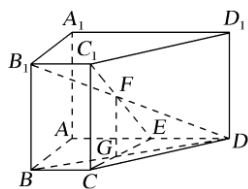
(2)若 $m \parallel n, n \subset \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$ 或 $m \subset \alpha$, 所以选项 A 不正确; 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $m \parallel n$ 或 m 与 n 异面, 所以选项 B 不正确; 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta, m \parallel \beta, n \parallel \alpha$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 所以选项 D 不正确. 故选 C.

答案 (1)B (2)C

考点二 直线与平面平行的判定与性质

例 2. 如图, 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为线段 AD 上的任意一点(不包括 A, D 两点), 平面 CEC_1 与平面 BB_1D 交于 FG .

证明: $FG \parallel$ 平面 AA_1B_1B .



证明 在四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1 \parallel CC_1$, $BB_1 \subset$ 平面 BB_1D , $CC_1 \not\subset$ 平面 BB_1D ,

所以 $CC_1 \parallel$ 平面 BB_1D .

又 $CC_1 \subset$ 平面 CEC_1 , 平面 CEC_1 与平面 BB_1D 交于 FG ,

所以 $CC_1 \parallel FG$.

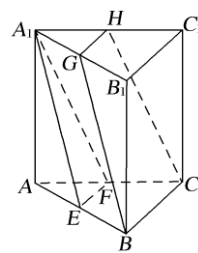
因为 $BB_1 \parallel CC_1$, 所以 $BB_1 \parallel FG$.

而 $BB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B , $FG \not\subset$ 平面 AA_1B_1B ,

所以 $FG \parallel$ 平面 AA_1B_1B .

考点三 平面与平面平行的判定与性质

例 3. (经典母题)如图所示,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E, F, G, H 分别是 AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 的中点, 求证:



(1) B, C, H, G 四点共面;

(2) 平面 $EFA_1 \parallel$ 平面 $BCHG$.

证明 (1) $\because G, H$ 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点,

$\therefore GH$ 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线, 则 $GH \parallel B_1C_1$.

又 $\because B_1C_1 \parallel BC$,

$\therefore GH \parallel BC$, $\therefore B, C, H, G$ 四点共面.

(2) $\because E, F$ 分别为 AB, AC 的中点, $\therefore EF \parallel BC$,

$\because EF \not\subset$ 平面 $BCHG, BC \subset$ 平面 $BCHG$,

$\therefore EF \parallel$ 平面 $BCHG$.

又 G, E 分别为 A_1B_1, AB 的中点, $A_1B_1 \parallel AB$,

$\therefore A_1G \parallel EB$,

$\therefore$ 四边形 A_1EBG 是平行四边形, $\therefore A_1E \parallel GB$.

$\because A_1E \not\subset$ 平面 $BCHG, GB \subset$ 平面 $BCHG$,

$\therefore A_1E \parallel$ 平面 $BCHG$. 又 $\because A_1E \cap EF = E$,

$\therefore$ 平面 $EFA_1 \parallel$ 平面 $BCHG$.

【迁移 1】 在本例中, 若将条件 “ E, F, G, H 分别是 AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 的中点” 变为 “ D_1, D 分别为 B_1C_1, BC 的中点”, 求证: 平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D .

证明 如图所示, 连接 A_1C 交 AC_1 于点 M ,

$\because$ 四边形 A_1ACC_1 是平行四边形,

$\therefore M$ 是 A_1C 的中点, 连接 MD ,

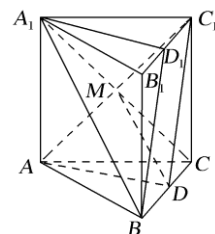
$\because D$ 为 BC 的中点,

$\therefore A_1B \parallel DM$.

$\because A_1B \subset$ 平面 $A_1BD_1, DM \not\subset$ 平面 A_1BD_1 ,

$\therefore DM \parallel$ 平面 A_1BD_1 ,

又由三棱柱的性质及 D, D_1 分别为 BC, B_1C_1 的中点知, $D_1C_1 \parallel BD$,



$\therefore$ 四边形 BDC_1D_1 为平行四边形, $\therefore DC_1 \parallel BD_1$.

又 $DC_1 \notin$ 平面 A_1BD_1 , $BD_1 \subset$ 平面 A_1BD_1 ,

$\therefore DC_1 \parallel$ 平面 A_1BD_1 ,

又 $DC_1 \cap DM = D$, $DC_1, DM \subset$ 平面 AC_1D ,

因此平面 $A_1BD_1 \parallel$ 平面 AC_1D .

【迁移 2】 在本例中, 若将条件“ E, F, G, H 分别是 AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 的中点” 变为“点 D, D_1 分别是 AC, A_1C_1 上的点, 且平面 $BC_1D \parallel$ 平面 AB_1D_1 ”, 试求 $\frac{AD}{DC}$ 的值.

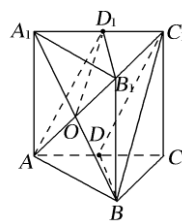
解 连接 A_1B 交 AB_1 于 O , 连接 OD_1 .

由平面 $BC_1D \parallel$ 平面 AB_1D_1 , 且平面 $A_1BC_1 \cap$ 平面 $BC_1D = BC_1$, 平面 $A_1BC_1 \cap$ 平面 AB_1D_1

$= D_1O$, 所以 $BC_1 \parallel D_1O$, 则 $\frac{A_1D_1}{D_1C_1} = \frac{A_1O}{OB} = 1$.

又由题设 $\frac{A_1D_1}{D_1C_1} = \frac{DC}{AD}$,

$\therefore \frac{DC}{AD} = 1$, 即 $\frac{AD}{DC} = 1$.



课堂小结

跟踪反馈

1. 设 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的一个充分条件是(D)

- A. 存在一条直线 a , $a \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$
- B. 存在一条直线 a , $a \subset \alpha$, $a \parallel \beta$
- C. 存在两条平行直线 a, b , $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$
- D. 存在两条异面直线 a, b , $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$

2. (2019 课标全国 II) 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是(B)

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
- B. α 内有两条相交直线与 β 平行
- C. α, β 平行于同一条直线
- D. α, β 垂直于同一平面

3. 设 l, m 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$, 下列结论正确的是(C)

A. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp \beta$

B. 若 $l \perp m$, 则 $\alpha \perp \beta$

C. 若 $\alpha // \beta$, 则 $l // \beta$

D. 若 $l // m$, 则 $\alpha // \beta$

4. (2019 全国 II 卷) 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是(B)

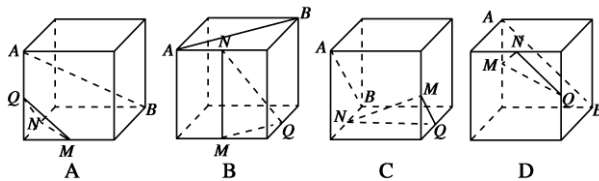
A. α 内有无数条直线与 β 平行

B. α 内有两条相交直线与 β 平行

C. α, β 平行于同一条直线

D. α, β 垂直于同一平面

5. 如图, 在下列四个正方体中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, Q 为所在棱的中点, 则在这四个正方体中, 直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是(A)



6. (多选) (2021 河南名校联盟质检改编) 设有不同的直线 a, b 和不同的平面 α, β , 给出下列四个命题中, 其中正确的是(CD)

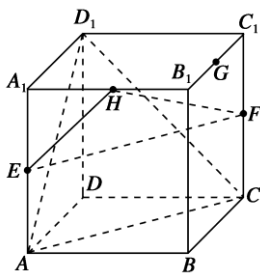
A. 若 $a // \alpha, b // \alpha$, 则 $a // b$

B. 若 $a // \alpha, a // \beta$, 则 $\alpha // \beta$

C. 若 $a \perp \alpha, b \perp \alpha$, 则 $a // b$

D. 若 $a \perp \alpha, a \perp \beta$, 则 $\alpha // \beta$

7. (多选) (2021 吉林省吉林市调研改编) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G, H 分别为所在棱的中点, 则下列各直线、平面中, 与平面 ACD_1 平行的是(ABD)



- A. 直线 EF
- B. 直线 GH
- C. 平面 EHF
- D. 平面 A_1BC_1

8. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 过直线 AC_1 的平面交直线 BB_1 于点 E , 交直线 DD_1 于点 F , 则四边形 AEC_1F 的形状为_____.

答案 平行四边形

9. (2021 辽宁省沈阳市质监)下列三个命题在“()”处都缺少同一个条件,补上这个条件使其构成真命题(其中 l, m 为直线, α, β 为平面),则此条件是 $l \subset \alpha$.

$$\textcircled{1} \left. \begin{array}{l} l // m \\ m // \alpha \\ () \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha; \quad \textcircled{2} \left. \begin{array}{l} m \subset \alpha \\ l // m \\ () \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha; \quad \textcircled{3} \left. \begin{array}{l} l \perp m \\ m \perp \alpha \\ () \end{array} \right\} \Rightarrow l // \alpha.$$

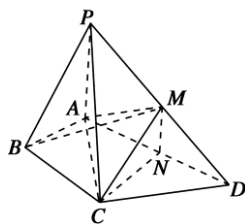
10. 已知不重合的直线 a, b 和平面 α ,

①若 $a // \alpha, b \subset \alpha$, 则 $a // b$; ②若 $a // \alpha, b // \alpha$, 则 $a // b$; ③若 $a // b, b \subset \alpha$, 则 $a // \alpha$; ④若 $a // b, a \subset \alpha$, 则 $b // \alpha$ 或 $b \subset \alpha$.

上面命题中正确的是_____ (填序号) .

答案 ④

11. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle ACD = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = 2$, $AB = 1$. 设 M, N 分别为 PD, AD 的中点.



(1)求证: 平面 $CMN \parallel$ 平面 PAB ;

(2)求三棱锥 $P-ABM$ 的体积.

[解析] (1)证明: $\because M, N$ 分别为 PD, AD 的中点,

$$\therefore MN \parallel PA, \text{ 又 } MN \not\subset \text{平面 } PAB, PA \subset \text{平面 } PAB,$$
$$\therefore MN \parallel \text{平面 } PAB.$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle CAD=60^\circ$, $CN=AN$,

$$\therefore \angle ACN = 60^\circ.$$

又 $\angle BAC = 60^\circ$, $\therefore CN \parallel AB$.

$\because CN \not\subset \text{平面 } PAB, AB \subset \text{平面 } PAB$,

$\therefore CN \parallel \text{平面 } PAB$.

又 $CN \cap MN = N, CN, MN \subset \text{平面 } CMN$,

$\therefore \text{平面 } CMN \parallel \text{平面 } PAB$.

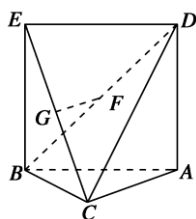
(2) 由(1)知, 平面 $CMN \parallel \text{平面 } PAB$,

$\therefore$ 点 M 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离.

$\because AB = 1, \angle ABC = 90^\circ, \angle BAC = 60^\circ, \therefore BC = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABM$ 的体积 $V = V_{M-PAB} = V_{C-PAB} = V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

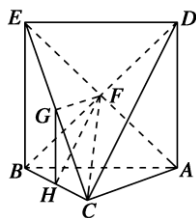
12. 如图, 在四棱锥 $C-ABED$ 中, 四边形 $ABED$ 是正方形, 点 G, F 分别是线段 EC, BD 的中点.



(1) 求证: $GF \parallel \text{平面 } ABC$.

(2) 线段 BC 上是否存在一点 H , 使得平面 $GFH \parallel \text{平面 } ACD$? 若存在, 请找出点 H 并证明; 若不存在, 请说明理由.

[解析] (1) $\because$ 四边形 $ABED$ 为正方形, F 为 BD 的中点,



$\therefore E, F, A$ 共线, 连 AE , 又 G 为 EC 的中点,

$\therefore GF \parallel AC$,

又 $GF \not\subset \text{平面 } ABC, AC \subset \text{平面 } ABC$,

$\therefore GF \parallel \text{平面 } ABC$.

注: 本题也可取 BE 的中点 Q , 连 GQ, FQ , 通过证平面 $GFQ \parallel \text{平面 } ABC$ 来证; 或取 BC 的中点 M , AB 的中点 N , 连 GM, MN, NF , 通过证四边形 $GMNF$ 为平行四边形得 $GF \parallel MN$ 来证.

(2) 当 H 为 BC 的中点时, 平面 $GFH \parallel \text{平面 } ACD$.

证明如下: $\because G, H$ 分别为 EC, BC 的中点,

$\therefore GH \parallel BE$, 又 $BE \parallel AD$,

$\therefore GH \parallel AD$,

又 $GH \not\subset \text{平面 } ACD, AD \subset \text{平面 } ACD$,

$\therefore GH \parallel \text{平面 } ACD$,

又 $GF \parallel AC$, $GF \not\subset \text{平面 } ACD$, $AC \subset \text{平面 } ACD$,

$\therefore GF \parallel \text{平面 } ACD$,

$\therefore \text{平面 } GFH \parallel \text{平面 } ACD$.