江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 1

一填空题

1．某市连续 5 天测得空气中 PM2.5（直径小于或等于 2.5 微米的颗粒物）的数据（单位：$\mu g/m^3$）分别为 115，125，132，128，125，则该组数据的方差为__________.

2．函数 $y=2\sin^2 x+3\cos^2 x-4$ 的最小正周期为__________.

3．已知 5 瓶饮料中有且仅有 2 瓶是果汁类饮料．从这 5 瓶饮料中随机取 2 瓶，则所取 2 瓶中至少有一瓶是果汁类饮料的概率为__________.

4．已知实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 3, \\ y\leqslant 3, \\ x\leqslant 3, \end{cases}$ 则 $z=5-x^2-y^2$ 的最大值为__________.

5．给出下列命题：

（1）若两个平面平行，那么其中一个平面内的直线一定平行于另一个平面；

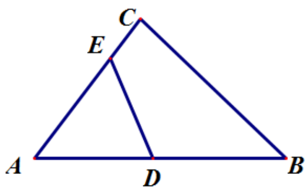
（2）若两个平面平行，那么垂直于其中一个平面的直线一定垂直于另一个平面；

（3）若两个平面垂直，那么垂直于其中一个平面的直线一定平行于另一个平面；

（4）若两个平面垂直，那么其中一个平面内的直线一定垂直于另一个平面．

则其中所有真命题的序号为____________.

6．平行四边形 $ABCI$ 中，已知 $AB=4, AD=3, \angle BAD=60^\circ$，点 E,F 分别满足 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FC}$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=$__________.



7．如图，在 ΔABC 中，已知 $AB=4, AC=3$，$\angle BAC=60^\circ$，点 D,E 分别是边 AB,AC 上的点，且 $DE=2$，则 $\dfrac{S_{四边形BCED}}{S_{\Delta ABC}}$ 的最小值等于____.

8．已知函数 $f(x)=x(|x|+4)$，且 $f(a^2)+f(a)<0$，则 a 的取值范围是____.

9．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l: y=k\left(x+2\sqrt{2}\right)$ 和点 $A\left(-\sqrt{2},0\right), B\left(\sqrt{2},0\right)$，动点 P 满足 $PA=\sqrt{2}PB$，且存在两点 P 到直线 l 的距离等于 1，则 k 的取值范围是_____.

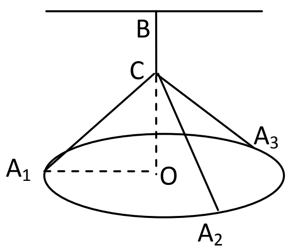
10．各项均为非负的任意等差数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1^2+a_{10}^2=5$，则$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$的取值范围是___________.

二解答题

11.如图所示：一吊灯的下圆环直径为 4*m*，圆心为 *O*，通过细绳悬挂在天花板上，圆环呈水平状态，并且与天花板的距离(即OB)为 2*m*，在圆环上设置三个等分点 A_1，A_2，A_3。点 *C* 为OB上一点（不包含端点 *O*、*B*），同时点 *C* 与点 A_1，A_2，A_3，*B* 均用细绳相连接，且细绳 CA_1，CA_2，CA_3 的长度相等。设细绳的总长为 *y*

（1）设$\angle CA_1O=\theta$ (*rad*)，将 *y* 表示成 θ 的函数关系式；

（2）请你设计θ，当角 θ 正弦值的大小是多少时，细绳总长 *y* 最小，并指明此时 *BC* 应为多长。



12. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，右焦点为 F，且椭圆 E 上的点到点 F 距离的最小值为 2.

（1）求 a， b 的值；

（2）设椭圆 E 的左、右顶点分别为 A,B，过点 A 的直线 l 与椭圆 E 及直线 $x=8$ 分别相交于点 M,N .

①当过 A,F,N 三点的圆半径最小时，求这个圆的方程；

②若 $\cos\angle AMB=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}$，求 $\triangle ABM$ 的面积.

三附加题

1 已知矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} x & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ 不存在逆矩阵，求实数 x 的值及矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值.

2．一个袋中装有大小和质地都相同的 10 个球，其中黑球 4 个，白球 5 个，红球 1 个。

（1）从袋中任意摸出 3 个球，记得到白球的个数为 X，求随机变量 X 的概率分布和数学期望 E(X)；

（2）每次从袋中随机地摸出一球，记下颜色后放回.求 3 次摸球后，摸到黑球的次数大于摸到白球的次数的概率.

江苏省仪征中学 2019 届高考考前数学热身练 1

一填空题

9．某市连续 5 天测得空气中 PM2.5（直径小于或等于 2.5 微米的颗粒物）的数据（单位：$\mu g/m^3$）分别为 115，125，132，128，125，则该组数据的方差为_____．$\dfrac{158}{5}$

10．函数 $y=2\sin^2 x+3\cos^2 x-4$ 的最小正周期为_____．π

11．已知 5 瓶饮料中有且仅有 2 瓶是果汁类饮料．从这 5 瓶饮料中随机取 2 瓶，则所取 2 瓶中至少有一瓶是果汁类饮料的概率为______．$\dfrac{7}{10}$

12．已知实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geqslant 3, \\ y\leqslant 3, \\ x\leqslant 3, \end{cases}$ 则 $z=5-x^2-y^2$ 的最大值为_____．$\dfrac{1}{2}$

13．给出下列命题：

（1）若两个平面平行，那么其中一个平面内的直线一定平行于另一个平面；

（2）若两个平面平行，那么垂直于其中一个平面的直线一定垂直于另一个平面；

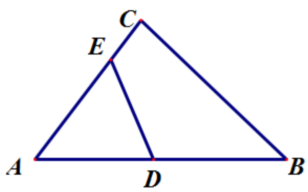
（3）若两个平面垂直，那么垂直于其中一个平面的直线一定平行于另一个平面；

（4）若两个平面垂直，那么其中一个平面内的直线一定垂直于另一个平面．

则其中所有真命题的序号为______．（1）（2）

6．平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=4, AD=3, \angle BAD=60^\circ$，点 E,F 分别满足 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DF}=\overrightarrow{FC}$，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=$____．$-6$

7．如图，在 ΔABC 中，已知 $AB=4, AC=3$，$\angle BAC=60^\circ$，点 D,E 分别是边 AB,AC 上的点，且 $DE=2$，则 $\dfrac{S_{四边形BCED}}{S_{\Delta ABC}}$ 的最小值等于____．$\dfrac{2}{3}$



【解】设 $AD=x, AE=y\left(0<x\le 4, 0<y\le 3\right)$，则

因为 $DE^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ$，所以 $x^2+y^2-xy=4$，从而

$4\ge 2xy-xy=xy$，当且仅当 $x=y=2$ 时等号成立，

所以 $\dfrac{S_{四边形BCED}}{S_{\Delta ABC}}=1-\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=1-\dfrac{\frac{1}{2}xy\sin 60^\circ}{\frac{1}{2}\times 3\times 4\sin 60^\circ}=1-\dfrac{xy}{12}\ge 1-\dfrac{4}{12}=\dfrac{2}{3}$。

8．已知函数 $f\left(x\right)=x\left(|x|+4\right)$，且 $f\left(a^2\right)+f\left(a\right)<0$，则 a 的取值范围是____．$\left(-1,0\right)$

【解析 1】当 $a\geq 0$ 时，则 $a^4+4a^2+a^2+4a<0$，此时无解；

当 $a<0$ 时，则 $a^4+4a^2-a^2+4a<0$，即 $a\left(a+1\right)\left(a^2-a+4\right)<0$，解得，故 $-1<a<0$。

【解析 2】由题意可知，函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，且在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上单调递增，

从而由 $f\left(a^2\right)<-f\left(a\right)=f\left(-a\right)$ 得 $a^2<-a$，解得 $-1<a<0$。

9．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l:y=k\left(x+2\sqrt{2}\right)$ 和点 $A\left(-\sqrt{2},0\right),B\left(\sqrt{2},0\right)$，动点 P 满足 $PA=\sqrt{2}PB$，且存在两点 P 到直线 l 的距离等于 1，则 k 的取值范围是____．

$\left(-1,-\dfrac{3\sqrt{41}}{41}\right)\cup\left(\dfrac{3\sqrt{41}}{41},1\right)$

【解析】设点 $P\left(x,y\right)$，则 $\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2=2\left[\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2\right]$，即 $\left(x-3\sqrt{2}\right)^2+y^2=16$，

要在圆 $\left(x-3\sqrt{2}\right)^2+y^2=16$ 上存在两点到直线 l 的距离等于 1，

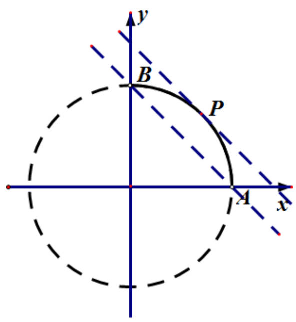
则需圆心 $\left(3\sqrt{2},0\right)$ 到直线 l 的距离 $d\in\left(3,5\right)$，即 $3<\dfrac{|5\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}<5$，

解得 $-1<k<-\dfrac{3\sqrt{41}}{41}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{41}}{41}<k<1$。

10．各项均为非负的任意等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1^2+a_{10}^2=5$，则 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$ 的取值范围是____．$\left[3\sqrt{5},3\sqrt{10}\right]$

【解析 1】由题意得 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=3\left(a_3+a_8\right)=3\left(a_1+a_{10}\right)$，

令 $x=a_1,y=a_{10}$，则 $x^2+y^2=5$ 且 $x\geq 0,y\geq 0$，



从而点 $\left(x,y\right)$ 在如图所示的四分之一个圆上，

故当直线 $t=x+y$ 过点 $A\left(\sqrt{5},0\right),B\left(0,\sqrt{5}\right)$ 时，$t_{\min}=\sqrt{5}$，

当直线 $t=x+y$ 与四分之一个圆相切于点 $P\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ 时，$t_{\max}=\sqrt{10}$，

从而$3\left(a_1+a_{10}\right)=3t\in\left[3\sqrt{5},3\sqrt{10}\right]$。

【解析 2】令$\begin{cases}a_1=\sqrt{5}\cos\theta\\a_{10}=\sqrt{5}\sin\theta\end{cases}\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=3\left(a_3+a_8\right)=3\left(a_1+a_{10}\right)=3\sqrt{10}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

因为$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以$\theta+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

故$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8\in\left[3\sqrt{5},3\sqrt{10}\right]$。

解析 3：由于已知条件及所求结论是对称的，

所以根据对称性原理，当$a_1=a_{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$时，$\left(a_1+a_{10}\right)_{\max}=\sqrt{10}$，

当$\begin{cases}a_1=0\\a_{10}=\sqrt{5}\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=\sqrt{5}\\a_{10}=0\end{cases}$时，$\left(a_1+a_{10}\right)_{\min}=\sqrt{5}$，

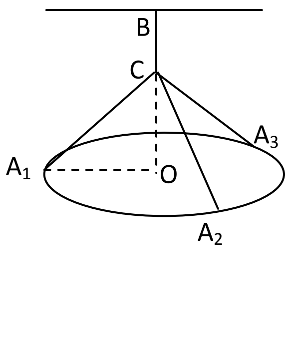
故所求的结果为$\left[3\sqrt{5},3\sqrt{10}\right]$。

二解答题

11.如图所示：一吊灯的下圆环直径为 4m，圆心为 O，通过细绳悬挂在天花板上，圆环呈水平状态，并且与天花板的距离(即OB) 为 2m，在圆环上设置三个等分点 A_1，A_2，A_3。点 C 为OB 上一点（不包含端点 O、B），同时点 C 与点 A_1，A_2，A_3，B 均用细绳相连接，且细绳 CA_1，CA_2，CA_3 的长度相等。设细绳的总长为 y

（1）设$\angle CA_1O=\theta$ (rad)，将 y 表示成 θ 的函数关系式；

（2）请你设计θ，当角 θ 正弦值的大小是多少时，细绳总长 y 最小，并指明此时 BC 应为多长。



11. （Ⅰ）解：在 $Rt\triangle \mathrm{COA_1}$ 中，$CA_1=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$CO=2\tan\theta$，

$y=3CA_1+CB=3\cdot\dfrac{2}{\cos\theta}+2-2\tan\theta=\dfrac{2(3-\sin\theta)}{\cos\theta}+2$（$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$）

（Ⅱ）$y'=2\dfrac{-\cos^2\theta-(3-\sin\theta)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=2\dfrac{3\sin\theta-1}{\cos^2\theta}$， 令 $y'=0$，则 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ 当

$\sin\theta>\dfrac{1}{3}$ 时，$y'>0$；$\sin\theta<\dfrac{1}{3}$ 时，$y'<0$，∵ $y=\sin\theta$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上是增函数

∴当角 θ 满足 $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ 时，y 最小，最小为 $4\sqrt{2}+2$；此时 $\mathrm{BC}=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，右焦点为 F，且椭圆 E 上的点到点 F 距离的最小值为 2.

（1）求 a，b 的值；

（2）设椭圆 E 的左、右顶点分别为 A,B，过点 A 的直线 l 与椭圆 E 及直线 $x=8$ 分别相交于点 M,N.

①当过 A,F,N 三点的圆半径最小时，求这个圆的方程；

②若 $\cos\angle AMB=-\dfrac{\sqrt{65}}{65}$，求 $\triangle ABM$ 的面积.

12．解：（1）$a=4$，$b=2\sqrt{3}$.

（2）①由(1)，$A(-4,0)$，$F(2,0)$，设 $N(8,t)$.

设圆的方程为 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，将点 A,F,N 的坐标代入，得

$$\begin{cases}16-4d+f=0,\\4+2d+f=0,\\64+t^2+8d+et+f=0,\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}d=2,\\e=-t-\dfrac{72}{t},\\f=-8,\end{cases}$$

所以圆方程为 $x^2+y^2+2x-(t+\dfrac{72}{t})y-8=0$，即 $(x+1)^2+[y-\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{72}{t})]^2=9+\dfrac{1}{4}(t+\dfrac{72}{t})^2$，

因为 $(t+\dfrac{72}{t})^2\geq(2\sqrt{72})^2$，当且仅当 $t+\dfrac{72}{t}=\pm12\sqrt{2}$ 时，圆的半径最小，

故所求圆的方程为 $x^2+y^2+2x\pm12\sqrt{2}y-8=0$.

②由对称性不妨设直线 l 的方程为 $y=k(x+4)(k>0)$.

由 $\begin{cases}y=k(x+4),\\\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1,\end{cases}$ 得 $M(\dfrac{12-16k^2}{3+4k^2},\dfrac{24k}{3+4k^2})$， $\therefore\overrightarrow{MA}=(\dfrac{-24}{3+4k^2},\dfrac{-24k}{3+4k^2})$

，$\overrightarrow{MB}=(\frac{32k^2}{3+4k^2},\frac{-24k}{3+4k^2})$，$\therefore \cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|}=\frac{-8\times 24k}{24\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(32k)^2+24^2}}=-\frac{\sqrt{65}}{65}$

化简，得$16k^4-40k^2-9=0$， 解得$k^2=\frac{1}{4}$，或$k^2=\frac{9}{4}$，即$k=\frac{1}{2}$，或$k=\frac{3}{2}$，

此时总有$y_M=3$，所以$\triangle ABM$的面积为$\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$.

三附加题

1 已知矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} x & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$不存在逆矩阵，求实数$x$的值及矩阵$\boldsymbol{M}$的特征值.

解：由题意，矩阵$\boldsymbol{M}$的行列式$\begin{vmatrix} x & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=0$，解得$x=5$， 矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$的特征多项式$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -5 \\ -6 & \lambda-6 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-6)-(-5)\times(-6)$，

令$f(\lambda)=0$并化简得$\lambda^2-11\lambda=0$，解得$\lambda=0$或$\lambda=11$，

2．一个袋中装有大小和质地都相同的10个球，其中黑球4个，白球5个，红球1个。

（1）从袋中任意摸出3个球，记得到白球的个数为X，求随机变量X的概率分布和数学期望E(X)；

（2）每次从袋中随机地摸出一球，记下颜色后放回.求3次摸球后，摸到黑球的次数大于摸到白球的次数的概率.

解:(1)随机变量X的取值为0,1,2,3,分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

…………………………………………………………………… 3分

X的数学期望$E(X)=\frac{1}{12}\times 0+\frac{5}{12}\times 1+\frac{5}{12}\times 2+\frac{1}{12}\times 3=\frac{3}{2}$. ………………………… 5分

(2)记3次摸球中,摸到黑球次数大于摸到白球次数为事件A,

则$P(A)=C_3^3(\frac{4}{10})^3+C_3^2[(\frac{4}{10})^2\cdot\frac{5}{10}+(\frac{4}{10})^2\cdot\frac{1}{10}]+C_3^1(\frac{4}{10})^1\cdot(\frac{1}{10})^2=\frac{91}{250}$.

答:摸到黑球的次数大于摸到白球的次数的概率为$\frac{91}{250}$. ………………………… 10分