

专题突破三 焦点弦的性质

抛物线的焦点弦是考试的热点,有关抛物线的焦点弦性质较为丰富,对抛物线焦点弦性质进行研究获得一些重要结论,往往能给解题带来新思路,有利于解题过程的优化.

一、焦点弦性质的推导

例1 抛物线 $y^2=2px(p>0)$, 设 AB 是抛物线的过焦点的一条弦(焦点弦), F 是抛物线的焦点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)(y_1>0, y_2<0)$, A, B 在准线上的射影为 A_1, B_1 .

证明: (1) $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$, $y_1y_2=-p^2$;

(2) 若直线 AB 的倾斜角为 θ , 则 $AF=\frac{p}{1-\cos\theta}$, $BF=\frac{p}{1+\cos\theta}$;

(3) $AB=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\theta}$ (其中 θ 为直线 AB 的倾斜角), 抛物线的通径长为 $2p$, 通径是最短的焦点弦;

(4) $\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{2}{p}$ 为定值;

(5) $S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\theta}$ (θ 为直线 AB 的倾斜角);

(6) 以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切;

(7) A, O, B_1 三点共线, B, O, A_1 三点也共线.

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

证明 (1) ①当 $AB \perp x$ 轴时,

不妨设 $A(\frac{p}{2}, p)$, $B(\frac{p}{2}, -p)$,

$$\therefore y_1y_2=-p^2, x_1x_2=\frac{p^2}{4}.$$

②当 AB 的斜率存在时, 设为 $k(k \neq 0)$,

则直线 AB 的方程为 $y=k(x-\frac{p}{2})$,

代入抛物线方程 $y^2=2px$,

消元得 $y^2=2p(\frac{y}{k}+\frac{p}{2})$,

$$\text{即 } y^2-\frac{2py}{k}-p^2=0,$$

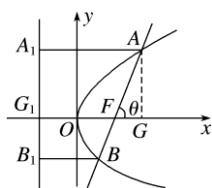
$$\therefore y_1y_2=-p^2, x_1x_2=\frac{p^2}{4}.$$

(2) 当 $\theta \neq 90^\circ$ 时, 过 A 作 $AG \perp x$ 轴, 交 x 轴于 G ,

由抛物线定义知 $AF=AA_1$,

在 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中, $FG=AF\cos\theta$,

由图知 $GG_1=AA_1$,



则 $p+AF\cos\theta=AF$, 得 $AF=\frac{p}{1-\cos\theta}$,

同理得 $BF=\frac{p}{1+\cos\theta}$;

当 $\theta=90^\circ$ 时, 可知 $AF=BF=p$,

对于 $AF=\frac{p}{1-\cos\theta}$, $BF=\frac{p}{1+\cos\theta}$ 亦成立,

$$\therefore AF=\frac{p}{1-\cos\theta}, \quad BF=\frac{p}{1+\cos\theta}$$

$$(3) AB=AF+BF=x_1+x_2+p$$

$$=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}\geq 2p,$$

当且仅当 $\theta=90^\circ$ 时取等号.

故通径长 $2p$ 为最短的焦点弦长.

(4)由(2)可得,

$$\frac{1}{AF}+\frac{1}{BF}=\frac{1-\cos\theta}{p}+\frac{1+\cos\theta}{p}=\frac{2}{p}.$$

$$(5) \text{当 } \theta=90^\circ \text{ 时, } S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times 2p\times \frac{p}{2}=\frac{p^2}{2},$$

$$\text{故满足 } S_{\triangle OAB}=\frac{p^2}{2\sin\theta};$$

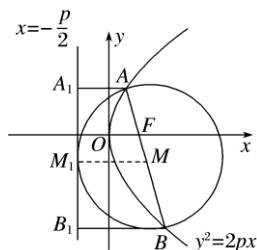
当 $\theta\neq 90^\circ$ 时, 设直线 $AB: y=\tan\theta\left(x-\frac{p}{2}\right)$,

原点 O 到直线 AB 的距离

$$d=\frac{\left|\frac{p}{2}\tan\theta\right|}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{p}{2}\sin\theta,$$

$$S_{\triangle OAB}=\frac{d}{2}AB=\frac{p}{4}\sin\theta\times\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{p^2}{2\sin\theta}.$$

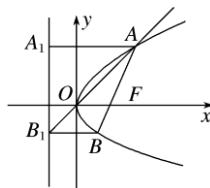
(6)如图: $\odot M$ 的直径为 AB , 过圆心 M 作 MM_1 垂直于准线于 M_1 ,



$$\text{则 } MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2} = \frac{AF + BF}{2} = \frac{AB}{2},$$

故以 AB 为直径的圆与准线相切.

(7) 设直线 AB 的方程: $x = my + \frac{p}{2}$,



代入 $y^2 = 2px$ 得 $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$.

由(1)可得 $y_1 y_2 = -p^2$.

$\because BB_1 \parallel x$ 轴, $\therefore B_1(-\frac{p}{2}, y_2)$, 即 $B_1(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{y_1})$,

$$k_{OB_1} = \frac{-\frac{p^2}{y_1}}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1} = \frac{y_1^2}{x_1} \times \frac{1}{y_1} = \frac{y_1}{x_1} = k_{OA},$$

$\therefore \vec{OB_1} \parallel \vec{OA}$ 且公共点为 O ,

$\therefore$ 直线 AB_1 过点 O .

$\therefore A, O, B_1$ 三点共线,

同理得 B, O, A_1 三点也共线.

二、焦点弦性质的应用

例2 (1) 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle OAB$ 的面积为()

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{63}{32}$ D. $\frac{9}{4}$

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 D

解析 方法一 由题意可知, 直线 AB 的方程为

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{4} \right),$$

代入抛物线的方程可得 $4y^2 - 12\sqrt{3}y - 9 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = 3\sqrt{3}$, $y_1 y_2 = -\frac{9}{4}$,

故所求三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{9}{4}$.

方法二 运用焦点弦倾斜角相关的面积公式,

$$\text{则 } S_{\triangle OAB} = \frac{p^2}{2\sin\theta} = \frac{\frac{9}{4}}{2\sin 30^\circ} = \frac{9}{4}.$$

(2) 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $AB + DE$ 的最小值为()

A.16 B.14 C.12 D.10

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 A

解析 **方法一** 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$,

由题意可知 l_1, l_2 的斜率存在且不为 0.

不妨设直线 l_1 的斜率为 k ,

$$l_1: y = k(x-1), l_2: y = -\frac{1}{k}(x-1),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x-1), \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = 2 + \frac{4}{k^2},$$

由抛物线的定义可知,

$$AB = x_1 + x_2 + 2 = 2 + \frac{4}{k^2} + 2 = 4 + \frac{4}{k^2}.$$

同理得 $DE = 4 + 4k^2$,

$$\therefore AB + DE = 4 + \frac{4}{k^2} + 4 + 4k^2 = 8 + 4\left(\frac{1}{k^2} + k^2\right) \geq 8 + 8 = 16,$$

当且仅当 $\frac{1}{k^2} = k^2$, 即 $k = \pm 1$ 时取等号,

故 $AB + DE$ 的最小值为 16.

方法二 运用焦点弦的倾斜角公式, 注意到两条弦互相垂直,

$$\text{因此 } AB + DE = \frac{2p}{\sin^2\theta} + \frac{2p}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

C.7

D.8

答案 C

解析 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$, 即 $x^2 = 4y$ 的准线方程为 $y = -1$,

$$\therefore AB = AF + BF = y_1 + y_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$$

3. 线段 AB 是过 $C: y^2 = 4x$ 焦点的弦, 且 $AB = 10$, 则 AB 中点的横坐标是_____.

答案 4

解析 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } AB \text{ 中点的横坐标 } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

又抛物线的准线方程为 $x = -1$ 且 $AB = 10$,

$$\therefore x_1 + x_2 + p = x_1 + x_2 + 2 = 10.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 8, \therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = 4.$$

4. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45° 的直线交抛物线于 A, B 两点, 若 AB 的长为 8, 则 p 等于_____.

答案 2

解析 由题意可知过焦点的直线方程为 $y = x - \frac{p}{2}$,

代入抛物线 $y^2 = 2px$,

$$\text{消去 } y \text{ 可得 } x^2 - 3px + \frac{p^2}{4} = 0,$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\therefore x_1 + x_2 = 3p, x_1 x_2 = \frac{p^2}{4},$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}|x_1 - x_2| = \sqrt{2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 4p = 8, \text{ 解得 } p = 2.$$

5. 过抛物线 $y = 2x^2$ 焦点的直线 l 与其相交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $y_1 y_2$ 的值为_____.

答案 $\frac{1}{64}$

解析 抛物线 $y = 2x^2$ 焦点坐标为 $(0, \frac{1}{8})$,

由题意直线方程设为 $y = kx + \frac{1}{8}$, 代入 $y = 2x^2$,

$$\text{可得 } 2x^2 - kx - \frac{1}{8} = 0, \text{ 所以 } x_1 x_2 = -\frac{1}{16},$$

$$\text{则 } y_1 y_2 = (2x_1^2)(2x_2^2) = \frac{1}{64}.$$

针对训练

一、选择题

1. 已知过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, $AF=2$, 则 BF 等于()

A.1 B.2 C.3 D.4

答案 B

解析 $\because y^2=4x, \therefore p=2, F(1,0)$, 又 $\because AF=2, \therefore x_A+\frac{p}{2}=2$, 即 $x_A+1=2, \therefore x_A=1$, 即 $AB \perp x$

轴, F 为 AB 的中点, $\therefore BF=AF=2$.

2. 已知 F 是抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点, 过点 F 的直线交抛物线 C 与 A, B 两点, 且 $AB=6$, 则弦 AB 中点的横坐标为()

A.1 B.2 C.3 D.5

答案 B

解析 $\because$ 抛物线 $y^2=4x, \therefore p=2$,

设经过点 F 的直线与抛物线相交于 A, B 两点, 其横坐标分别为 x_1, x_2 , 利用抛物线定义,

AB 中点的横坐标为 $x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}(AB-p)$

$$=\frac{1}{2} \times (6-2)=2.$$

3. 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 60° 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, 且 $AF>BF$,

则 $\frac{AF}{BF}$ 的值为()

A.3 B.2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 A

解析 由抛物线的性质可知,

$$AF=\frac{p}{1-\cos 60^\circ}, BF=\frac{p}{1+\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{1+\cos 60^\circ}{1-\cos 60^\circ}=3.$$

4. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 过焦点 F 的直线与抛物线交于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1^2+y_2^2$ 的最小值为()

A.4 B.6 C.8 D.10

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 C

解析 由焦点弦的性质知,

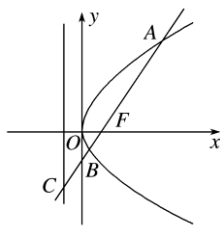
$$y_1 y_2 = -4, \text{ 即 } |y_1| |y_2| = 4,$$

$$\text{则 } y_1^2 + y_2^2 \geq 2|y_1| |y_2| = 8,$$

当且仅当 $|y_1| = |y_2| = 2$ 时, 取等号.

故 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值为 8.

5. 如图, 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于点 A, B , 交其准线于点 C , 若 $BC = 3BF$, 且 $AF = 4$, 则 p 的值为()



A. $\frac{4}{3}$

B. 2

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{16}{3}$

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 C

解析 设直线 l 的倾斜角为 θ ,

$$\text{由焦点弦的性质知, } BF = \frac{p}{1 + \cos \theta}, \quad AF = \frac{p}{1 - \cos \theta},$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{p}{\cos \theta (1 + \cos \theta)} = \frac{3p}{1 + \cos \theta}, \\ \frac{p}{1 - \cos \theta} = 4, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{3}, \\ p = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

6. 直线 $4kx - 4y - k = 0$ 与抛物线 $y^2 = x$ 交于 A, B 两点, 若 $AB = 4$, 则弦 AB 的中点到直线 $x + \frac{1}{2} = 0$ 的距离为()

A. $\frac{9}{4}$

B. $\frac{9}{2}$

C. 1

D. 2

答案 A

解析 直线 $4kx - 4y - k = 0$, 即 $y = k\left(x - \frac{1}{4}\right)$, 即直线 $4kx - 4y - k = 0$ 过抛物线 $y^2 = x$ 的焦点

$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $AB = x_1 + x_2 + \frac{1}{2} = 4$, 故 $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, 则弦 AB 的中点的横坐

标是 $\frac{7}{4}$, 所以弦 AB 的中点到直线 $x+\frac{1}{2}=0$ 的距离是 $\frac{7}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$.

二、填空题

7. 设 F 为抛物线 $C: y^2=3x$ 的焦点, 过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A, B 两点, 则 $AB=$ _____.

答案 12

解析 抛物线的焦点坐标为 $F(\frac{3}{4}, 0)$, 直线 AB 的斜率 $k=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以直线 AB 的方程

为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}$. 由 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ y^2=3x, \end{cases}$ 得 $\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{16}=0$, 故 $x_1+x_2=\frac{21}{2}$, $x_1x_2=\frac{9}{16}$, 所以 AB

$$=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2-4\times\frac{9}{16}}=12.$$

8. 直线 l 过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点, 且与抛物线交于 A, B 两点, 若线段 AB 的长是8, AB 的中点到 y 轴的距离是2, 则此抛物线方程是_____.

答案 $y^2=8x$

解析 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 根据抛物线定义,

$$AB=x_1+x_2+p=8,$$

$\because AB$ 的中点到 y 轴的距离是2,

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=2, \therefore p=4,$$

$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=8x$.

9. 已知抛物线 $y^2=4x$, 过焦点 F 的直线与抛物线交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作 y 轴的垂线, 垂足分别为 C, D , 则 $AC+BD$ 的最小值为_____.

答案 2

解析 由题意知 $F(1,0)$, $AC+BD=AF+FB-2=AB-2$, 即 $AC+BD$ 取得最小值时当且仅当 AB 取得最小值. 依抛物线定义知, 当 AB 为通径, 即 $AB=2p=4$ 时为最小值, 所以 $AC+BD$ 的最小值为2.

10. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线交抛物线于 P, Q 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle POQ$ 的面积为_____.

答案 $2\sqrt{2}$

解析 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}OF|y_1-y_2|.$$

过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 $(1,0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线为 $x-y-1=0$,

即 $x=1+y$, 代入 $y^2=4x$, 得

$$y^2=4(1+y), \text{ 即 } y^2-4y-4=0,$$

$$\therefore y_1+y_2=4, y_1y_2=-4,$$

$$\therefore |y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}OF|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}.$$

11. 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点, A, B, C 为该抛物线上三点, 若 $\vec{FA}+\vec{FB}+\vec{FC}=\mathbf{0}$, 则 $|\vec{FA}|+|\vec{FB}|+|\vec{FC}|=$ _____.

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 6

解析 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 又 $F(1,0)$.

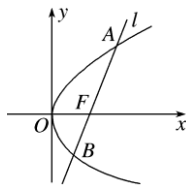
由 $\vec{FA}+\vec{FB}+\vec{FC}=\mathbf{0}$ 知 $(x_1-1)+(x_2-1)+(x_3-1)=0$,

即 $x_1+x_2+x_3=3$,

$$|\vec{FA}|+|\vec{FB}|+|\vec{FC}|=x_1+x_2+x_3+\frac{3}{2}p=6.$$

三、解答题

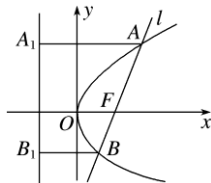
12. 已知直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F , 且与抛物线相交于 A, B 两点.



(1) 若 $AF=4$, 求点 A 的坐标;

(2) 求线段 AB 的长的最小值.

解 由 $y^2=4x$, 得 $p=2$, 其准线方程为 $x=-1$, 焦点 $F(1,0)$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.



(1) 由抛物线的定义可知,

$$AF=x_1+\frac{p}{2}, \text{ 从而 } x_1=4-1=3. \text{ 代入 } y^2=4x,$$

解得 $y_1=\pm 2\sqrt{3}$.

所以点 A 的坐标为 $(3, 2\sqrt{3})$ 或 $(3, -2\sqrt{3})$.

(2) 当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x-1)$, 与抛物线方程联立, 得

$$\begin{cases} y = k(x-1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$$

消去 y , 整理得 $k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 = 0$, 因为直线与抛物线相交于 A, B 两点,

则 $k \neq 0$, 并设其两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = 2 + \frac{4}{k^2}$.

由抛物线的定义可知, $AB = x_1 + x_2 + p = 4 + \frac{4}{k^2} > 4$,

当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = 1$,

与抛物线交于 $A(1, 2), B(1, -2)$, 此时 $AB = 4$,

所以 $AB \geq 4$, 即线段 AB 的长的最小值为 4.

13. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 抛物线 $E: x^2 = 2py$ 的焦点为 M .

(1) 若过点 M 的直线 l 与抛物线 C 有且只有一个交点, 求直线 l 的方程;

(2) 若直线 MF 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 的面积.

解 (1) 因为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 抛物线 $E: x^2 = 2py$ 的焦点为 M , 所以 $p = 2$, $M(0, 1)$.

① 当直线 l 的斜率不存在时, 其方程为 $x = 0$, 满足题意;

② 当直线 l 的斜率存在时, 设方程为 $y = kx + 1$, 代入 $y^2 = 4x$, 得 $k^2x^2 + (2k-4)x + 1 = 0$, 当 $k = 0$ 时, $x = \frac{1}{4}$, 满足题意, 直线 l 的方程为 $y = 1$; 当 $k \neq 0$ 时, 令 $\Delta = (2k-4)^2 - 4k^2 = 0$, 所以

$k = 1$, 直线 l 的方程为 $y = x + 1$. 综上, 直线 l 的方程为 $x = 0$ 或 $y = 1$ 或 $y = x + 1$.

(2) 结合(1)知抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$, 直线 MF 的方程为 $y = -x + 1$.

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = -x + 1, \end{cases} \text{得 } y^2 + 4y - 4 = 0,$$

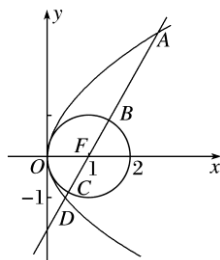
设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

则 $y_1 + y_2 = -4, y_1y_2 = -4$, 所以 $|y_1 - y_2| = 4\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OF|y_1 - y_2| = 2\sqrt{2}$.

►探究与拓展

14. 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 圆 $F: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 过点 F 作直线 l , 自上而下顺次与上述两曲线交于点 A, B, C, D (如图所示), 则下列关于 $AB \cdot CD$ 的值的说法中, 正确的是()



A.等于 1

B.等于 4

C.最小值是 1

D.最大值是 4

考点 抛物线中过焦点的弦长问题

题点 与弦长有关的其它问题

答案 A

解析 设直线 $l: x = ty + 1$,

代入抛物线方程, 得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$.

设 $A(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$,

根据抛物线的定义知,

$AF = x_1 + 1$, $DF = x_2 + 1$,

故 $AB = x_1$, $CD = x_2$,

所以 $AB \cdot CD = x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = \frac{(y_1 y_2)^2}{16}$,

而 $y_1 y_2 = -4$, 故 $AB \cdot CD = 1$.

15. 给定抛物线 $C: y^2 = 4x$, F 是抛物线 C 的焦点, 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, 若 $\vec{FA} = 2\vec{BF}$, 求直线 l 的方程.

解 显然直线 l 的斜率存在且不为 0,

故可设直线 $l: y = k(x - 1) (k \neq 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立 $\begin{cases} y = k(x - 1), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 y 得

$k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, 则 $x_1 x_2 = 1$, 故 $x_1 = \frac{1}{x_2}$, ①

又 $\because \vec{FA} = 2\vec{BF}$, 则 $x_1 - 1 = 2(1 - x_2)$, ②

由①②得 $x_2 = \frac{1}{2}$ ($x_2 = 1$ 舍去), 所以 $B(\frac{1}{2}, \pm\sqrt{2})$, 得直线 l 的斜率为 $k = k_{BF} = \pm 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y = \pm 2\sqrt{2}(x - 1)$.