南师附中 2019 届高三年级模拟考试

数　学

2019.05

注意事项:

1．本试卷共 4 页，包括填空题(第 1 题~第 14 题)、解答题(第 15 题~第 20 题)两部分．本试卷满分为 160 分，考试时间为 120 分钟．

2．答题前，请务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答题卡的密封线内．试题的答案写在答题卡上对应题目的答案空格内．考试结束后，交回答题纸．

参考公式：

锥体的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是锥体的底面积，h 是锥体的高．

一、填空题:本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需写出解答过程，请把答案写在答题卡相应位置上．

1．已知集合 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=$___▲___．

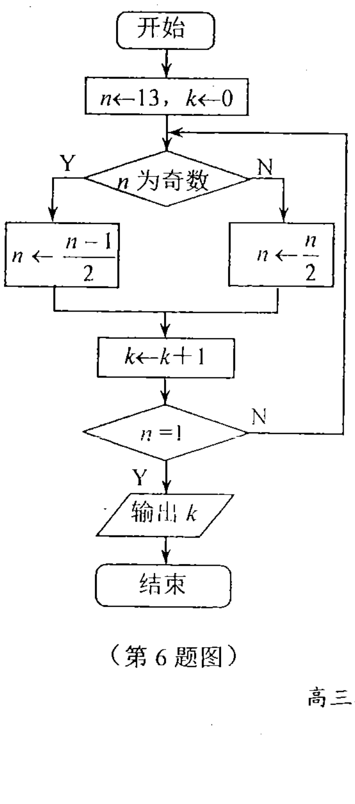
2．已知复数 $z=(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$，其中 i 是虚数单位．若 z 的实部与虚部相等，则实数 a 的值为___▲___．

3．某班有学生 52 人，现将所有学生随机编号，用系统抽样方法，抽取一个容量为 4 的样本，已知 5 号、31 号、44 号学生在样本中，则样本中还有一个学生的编号是___▲___．

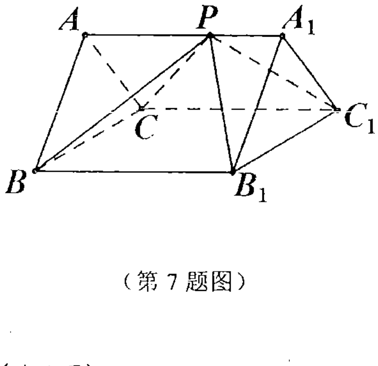
4．3 张奖券分别标有特等奖、一等奖和二等奖．甲、乙两人同时各抽取 1 张奖券，两人都未抽得特等奖的概率是___▲___．

5．函数 $f(x)=\sqrt{x}+\log_2(1-x)$的定义域为___▲___．

6．下图是一个算法流程图，则输出的 k 的值为___▲___．



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7．若正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2，点 P 为侧棱 AA_1 上任意一点，则四棱锥 $P-BCC_1B_1$ 的体积为__▲__．

8．在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在曲线 C：$y=x^3-10x+3$ 上，且在第四象限内．已知曲线 C 在点 P 处的切线为 $y=2x+b$，则实数 b 的值为__▲__．

9．已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)-\cos(2x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，则 $f(-\frac{\pi}{8})$ 的值为__▲__．

10．如果函数 $f(x)=(m-2)x^2+2(n-8)x+1$（m，$n\in\mathbf{R}$ 且 $m\geqslant 2$，$n\geqslant 0$）在区间 $[\frac{1}{2}，2]$ 上单调递减，那么 mn 的最大值为__▲__．

11．已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）有相同的焦点，其左、右焦点分别为 F_1、F_2，若椭圆与双曲线在第一象限内的交点为 P，且 $F_1P=F_1F_2$，则双曲线的离心率为__▲__．

12．在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为 $(0，5)$，点 B 是直线 l：$y=\frac{1}{2}x$ 上位于第一象限内的一点．已知以 AB 为直径的圆被直线 l 所截得的弦长为 $2\sqrt{5}$，则点 B 的坐标为__▲__．

13．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases} a_n+2，n=2k-1，k\in\mathbf{N}^*， \\ 2a_n，n=2k，k\in\mathbf{N}^*， \end{cases}$

则满足 $2019\leqslant S_m\leqslant 3000$ 的正整数 m 的所有取值为__▲__．

14．已知等边三角形 ABC 的边长为 2，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，点 N、T 分别为线段 BC、CA 上的动点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{TM}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{MN}$ 取值的集合为__▲__．

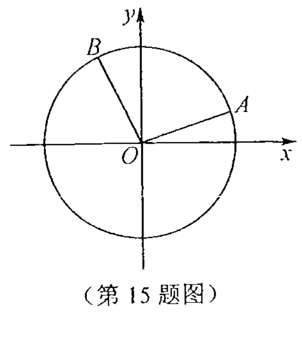
二、**解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15．(本小题满分 14 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以 x 轴正半轴为始边的锐角 α 的终边与单位圆 O 交于点 A，且点 A 的纵坐标是 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．

（1） 求 $\cos(\alpha-\frac{3\pi}{4})$ 的值；

（2）若以 x 轴正半轴为始边的钝角 β 的终边与单位圆 O 交于点 B，且点 B 的横坐标为 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$，求 $\alpha+\beta$ 的值．



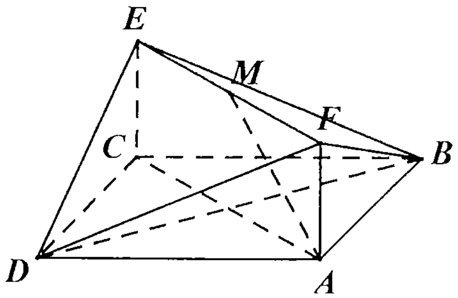
（第 15 题图）

16．(本小题满分 14 分)

如图，已知正方形 $ABCD$ 和矩形 $ACEF$ 所在的平面互相垂直，$AB=\sqrt{2}$，$AF=1$，M 是线段 EF 的中点.

（1）求证：$AM /\!/$ 平面 BDE;

（2）求证：$AM\perp$平面 BDF.



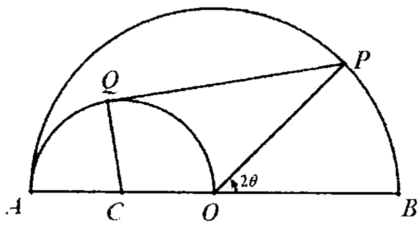
（第 16 题图）

17． (本小题满分 14 分)

某广告商租用了一块如图所示的半圆形封闭区域用于产品展示，该封闭区域由以 O 为圆心的半圆及直径 AB 围成．在此区域内原有一个以 OA 为直径、C 为圆心的半圆形展示区，该广告商欲在此基础上，将其改建成一个凸四边形的展示区 $COPQ$，其中 P、Q 分别在半圆 O 与半圆 C 的圆弧上，且 PQ 与半圆 C 相切于点 Q．已知 AB 长为 40 米，设$\angle BOP$ 为 2θ.（上述图形均视作在同一平面内）

（1）记四边形 $COPQ$ 的周长为 $f(\theta)$，求 $f(\theta)$的表达式;

（2）要使改建成的展示区 $COPQ$ 的面积最大，求 $\sin\theta$ 的值.



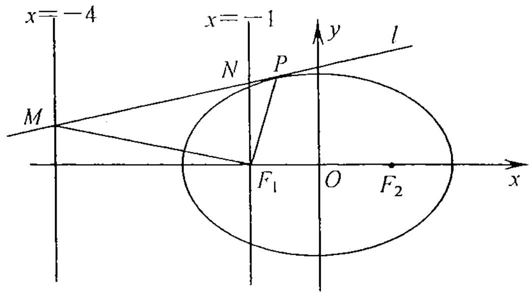
（第 17 题图）

18．(本小题满分 16 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，且点 F_1，F_2 与椭圆 C 的上顶点构成边长为 2 的等边三角形.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知直线 l 与椭圆 C 相切于点 P，且分别与直线 $x=-4$ 和直线 $x=-1$ 相交于点 M、N. 试判断$\dfrac{NF_1}{MF_1}$是否为定值，并说明理由.



（第 18 题图）

19．(本小题满分 16 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$（$n\in\mathbf{N}^*$），数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(b_1+b_n)}{2}$（$n\in\mathbf{N}^*$），且 $b_1=1$，$b_2=2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（3）设 $c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{b_n\cdot b_{n+1}}$，记 T_n 是数列$\{c_n\}$的前 n 项和，求正整数 m，使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$均有 $T_m\geqslant T_n$.

20．(本小题满分 16 分)

设 a 为实数，已知函数 $f(x)=axe^x$，$g(x)=x+\ln x$.

（1）当 $a<0$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

（2）设 b 为实数，若不等式 $f(x)\geqslant 2x^2+bx$ 对任意的 $a\geqslant 1$ 及任意的 $x>0$ 恒成立，求 b 的取值范围；

（3）若函数 $h(x)=f(x)+g(x)$（$x>0$，$x\in\mathbf{R}$）有两个相异的零点，求 a 的取值范围.

高三年级模拟考试

数学附加题

2019.05

注意事项：

1．附加题供选修物理的考生使用．

2．本试卷共 40 分，考试时间 30 分钟．

3．答题前，考生务必将自己的姓名、学校、班级、学号写在答题卡的密封线内．试题的答案写在答题纸上对应题目的答案空格内．考试结束后，交回答题纸．

21．【选做题】在 A、B、C 三小题中只能选做 2 题，每小题 10 分，共计 20 分．请在答卷纸指定区域内作答．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修 4—2：矩阵与变换

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$，二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

（1）求矩阵 $\boldsymbol{B}$；

（2）求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值．

B．选修 4—4：坐标系与参数方程

设 a 为实数，在极坐标系中，已知圆 $\rho=2a\sin\theta$（$a>0$）与直线 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=1$ 相切，求 a 的值．

C．选修 4—5：不等式选讲

求函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{3x+2}$ 的最大值．

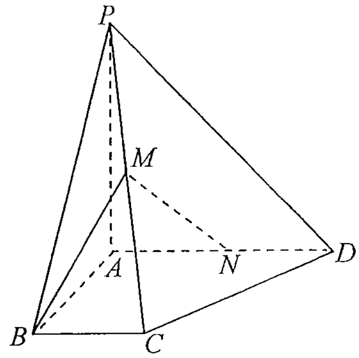
【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答卷纸指定区域内作答．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22．（本小题满分 10 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ABC=\angle BAD=90^\circ$，$AD=AP=4$，$AB=BC=2$，$M$ 为 PC 的中点．

（1）求异面直线 AP 与 BM 所成角的余弦值；

（2）点 N 在线段 AD 上，且 $AN=\lambda$，若直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{4}{5}$，求 λ 的值．



（第 22 题图）

23．(本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，有一个微型智能机器人（大小不计）只能沿着坐标轴的正方向或负方向行进，且每一步只能行进 1 个单位长度，例如：该机器人在点(1，0)处时，下一步可行进到(2，0)、(0，0)、(1，1)、(1，－1)这四个点中的任一位置．记该机器人从坐标原点 O 出发、行进 n 步后落在 y 轴上的不同走法的种数为 $L(n)$．

（1）分别求 $L(1)$、$L(2)$、$L(3)$的值；

（2）求 $L(n)$的表达式．