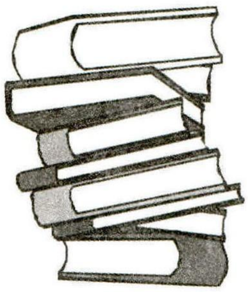
一题之“多”在复习课教学中的有效运用



张孝梅（吉林省延边第二中学）

教师普遍认为，高三的数学复习课难上，它不具备新授课的新鲜感，又缺少专题课的成就感，更没有一个公认的基本的课堂教学范式。如何提高数学复习课教学的有效性？一直是教师感到困惑的问题，在新课标理念下，更成为数学教师的重要研究课题之一。经过多年的教学实践，笔者认为，合理恰当地运用变式教学，是提高数学复习课效率的有效途径之一。

数学变式教学中的一题之“多”是指：一题多解、一题多变、一题多导、一题多问等几个方面，一题之“多”是进行多维型数学思维训练的有效方法[1]。实践证实：以例题、习题为载体的数学复习，可以引导学生从不同情形、不同角度、不同层次、不同背景进行变通推广，搞清问题的内涵和外延，重新认识问题的本质[2]。下面笔者结合高三复习实践，浅谈一题之“多”的变式教学在数学复习课中的有效运用。

1 一题多解，拓展思维

一题多解是以不同的论证方式，反映条件和结论的必然本质联系。在教学中，教师应积极地引导学生从各种途径，用多种方法思考问题。这样，既可暴露学生解题的思维过程，增加教学透明度，又能使学生思路开阔，熟练掌握知识的内在联系，从而培养思维的灵活性。

例1 已知 x、$y\geqslant 0$ 且 $x+y=1$，求 x^2+y^2 的取值范围。

解法1：（函数思想）由 $x+y=1$ 可得 $y=1-x$，代入所求式，得 $x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，$x\in[0,1]$，结合二次函数图像可知 $x^2+y^2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。

评注：函数思想是重要的数学思想之一，是求函数值域问题的一种常用方法。对二元函数的值域解法，一般是通过消元的方法将其转化为一元函数来解决，这是一种最基本的解决问题的思想。

解法2：（三角换元）由于 x、$y\geqslant 0$，$x+y=1$，设 $x=\cos^2\theta$，$y=\sin^2\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $x^2+y^2=\cos^4\theta+\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\cos^2\theta\sin^2\theta=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\theta$。

由 $\cos 4\theta\in[-1,1]$ 得 $x^2+y^2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。

评注：灵活运用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 进行三角换元，也是高中数学的基本思想方法之一。它可以比较简单地解决某些函数的值域问题。启发引导学生积极思考、运用，可以提高学生的数学解题能力，激活学生的数学思维能力。

解法3：（基本不等式）因为 x、$y\geqslant 0$ 且 $x+y=1$，则 $xy\leqslant\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}$，所以 $xy\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$。

所以 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2xy\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。

利用 $[k,k+1]$ 之间梯形和曲边四边形的面积之间的关系，得 $\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}>\int_n^{2n}f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\frac{1}{x}$。由 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的凹凸性可知 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内为下凸函数。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>$$

$\ln x|_n^{2n}=\ln 2$，即 $\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n}>\ln 2$。

说明：这就是高等数学中的微积分初步，站在高观点下，问题解决如此简单，学生豁然开朗。这样的问题在不等式证明中屡见不鲜，除了不等式基本证明方法之外，高观点下的不等式的证明方法还有很多。

作为一名合格的中学数学教师，必须精通高等数学的知识，不断地学习充实自己，也许同样的课堂不可能再次上演，但是被教师启发过的学生，会在不同的课堂为教学带来意外的收获。在高观点下的高中数学课堂教学中的探索和实践，应有效地与高中课堂结合在一起，真正发挥高等数学对初等数学教学的指导作用。

评注：运用基本不等式可以解决两个正数"和定积最大，积定和最小"的最值问题，注意事项是等号成立的条件是否同时满足。

解法4：（数形结合思想）如图1，构造 $d=\sqrt{x^2+y^2}$，则 d 的几何意义是动点 $C(x,y)$ 到原点 $O(0,0)$ 的距离，将其转化为求原点到线段 $\begin{cases}x+y=1,\\x\geqslant 0,\\y\geqslant 0\end{cases}$ 距离的最大值和最小值问题。

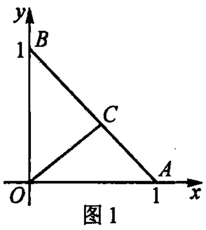


图1

结合图形，当点 C 与点 A 或点 B 重合时，$d_{\max}=1$，则 $(x^2+y^2)_{\max}=1$；

当 $OC\perp AB$ 时，$d_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $(x^2+y^2)_{\min}=\frac{1}{2}$。

所以 $x^2+y^2\in\left[\frac{1}{2},1\right]$。

评注：数形结合思想可以直观地解决函数中的取值范围问题。运用代数式的几何意义，构造出相关的几何元素，即运用几何手段研究代数问题，促进学生数形结合思想的形成，从而加快解题速度，提高复习效率。这对培养学生数学思维能力有积极的作用。

数学思想方法是数学的灵魂，通过一题多解渗透思想方法，从多个角度探索解题思路是培养学生思维能力的有效途径。在高三数学复习教学中，教师要加强数学思想和数学方法的教学，不断培养学生的探索能力，提高复习的有效性。

2 一题多变，以变促思

对一个数学问题进行一题多变，横向联想、推广，可以得到一系列相关联的新题目，甚至可以推广出更一般的结论。积极开展一题多变的变式教学，有助于学生应变能力的形成，培养学生的发散思维能力，增强学生面对新问题敢于联想、分析，勇于探究的思想意识。在例题或习题讲解中注重一题多变，有利于从一道题中发现问题本质，揭示解题规律，从而举一反三。

例2 在三棱椎中，若三条侧棱相等，则顶点在底面的射影是底面三角形的______。

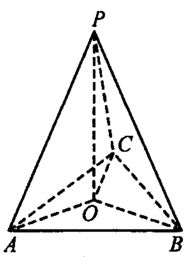


图2

证明：如图2，在三棱椎 P-ABC 中，若 $PA=PB=PC$，$PO\perp$ 平面 ABC，联结 OA、OB、OC，所以由射影长定理得 $OA=OB=OC$。所以 O 为 $\triangle ABC$ 的外心。

变式1：在三棱椎中，若三条侧棱与底面所成的角相等，则顶点在底面的射影是底面三角形的______。

结论：外心。

变式2：在三棱椎中，若顶点到底面三边距离相等，则顶点在底面的射影是底面三角形的______。

结论：内心。

变式3：在三棱椎中，若三个侧面与底面所成的角相等，则顶点在底面的射影是底面三角形的______。

结论：内心。

变式4：在三棱椎中，若三条侧棱两两垂直，则顶点在底面的射影是底面三角形的______。

结论：垂心。

变式5：在三棱椎中，若三组对棱中，有两对互相垂直，则另两对也互相垂直，且顶点在底面的射影是底面三角形的______。

结论：垂心

评注：三棱锥的顶点在底面的射影是解决三棱锥问题中的有关直线与平面垂直问题的核心，类似的变式教学，不仅能够提高学生运用已有知识解决数学问题的能力，而且能够促进学生积极思考，培养学生的创新能力，发展学生的求异思维。

在数学复习教学中，将经典例题、习题充分挖掘，注重对例题、习题进行一题多变，不但可以扎实地把握基础知识点，还可以激发学生的探究欲望，提高其善变、创新的能力；有利于学生更加深入地研究例题，同时体会数学学习的乐趣，进一步训练数学思维的深刻性。

3 一题多导，改造深化

在高三专题复习的过程中，重视一题多导，对教材例题、习题的条件、结论加以改造、深化，可以很好地扩大训练功能，开阔学生解题视野，便于学生从茫茫题海中解脱出来，有效训练了学生的思维能力[3]。

例3 已知点 $P(x,y)$，x、y 满足 $x^2+y^2=1$，求 $\frac{y-1}{x-2}$ 的最值。

分析：构造代数式的几何意义，转化为单位圆上的动点 $P(x,y)$ 到定点 $Q(2,1)$ 斜率的最大值与最小值问题，运用数形结合思想，容易得到 P_1 点即为最小值点，P_2 点即为最大值点，如图3。

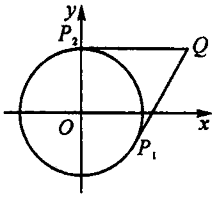


图3

完成此题并不是最终目的，重要的是以此题为母题，引导学生寻求探究出与此题形异质同、解题规律相同的一类问题。运用数形结合可以迅速地解决如下问题：

导向题组1：$P(x,y)$ 在圆上运动的轨迹不变，所

求解的代数式改变。

(1)求$\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}$的最值；

分析：转化为单位圆上的动点 $P(x,y)$ 到定点 $(2,-3)$ 的距离的最值问题。

(2)求 x^2+y^2+4y+4 的取值范围；

分析：转化为单位圆上的动点 $P(x,y)$ 到定点 $(-2,0)$ 的距离的平方的取值范围。

(3)求$|x+2y+4|$的最大值与最小值；

分析：转化为单位圆上的动点 $P(x,y)$ 到定直线 $x+2y+4=0$ 的距离的$\sqrt{5}$倍的最大值与最小值。

(4)求 $2x+4y+4$ 的最值。

分析：令 $2x+4y+4=m$，转化为斜率为$-\frac{1}{2}$的动直线与单位圆有交点时截距的最值问题。

导向题组2：$P(x,y)$的运动轨迹变为椭圆，所求解的代数式不变。对例3进行如下改编。

例4 已知点 $P(x,y)$，x、y 满足$\frac{x^2}{2}+y^2=1$。

求：(1)$\frac{y-1}{x-2}$的最值；

(2)求$\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}$的最值；

(3)求 x^2+y^2+4y+4 的取值范围；

(4)求$|x+2y+4|$的最大值与最小值；

(5)求 $2x+4y+4$ 的最值。

分析：$P(x,y)$运动的轨迹变为椭圆，代数式构造的几何量的几何意义不变。

导向题组3：$P(x,y)$的运动轨迹变为区域，所求解的代数式不变。对例3进行改编。

例5 已知点 $P(x,y)$，x、y 满足$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y-1\leqslant 0\\y\geqslant 0。\end{cases}$，

求：(1)$\frac{y-1}{x-2}$的最值；

(2)求$\sqrt{x^2+y^2-4x+6y+13}$的最值；

(3)求 x^2+y^2+4y+4 的取值范围；

(4)求$|x+2y+4|$的最大值与最小值；

(5)求 $2x+4y+4$ 的最值。

分析：$P(x,y)$运动的轨迹变为三角形及其内部的区域，代数式构造的几何量的几何意义不变。

评注：以上问题可以根据代数式的特征，分别构造出斜率型、距离型、截距型的几何量，结合动点运动轨迹，进一步运用数形结合的思想来解决，虽然形式不同，但源于同一题型，同一解题规律，解题时应注意总结。具体问题的解决并不困难，但其解题方法却很有用。激励学生一题多导，将条件、结论进行创造性的加工、引申、变式、改造，将其系统地进行归类、梳理，对学生而言虽然具有一定的困难和挑战，但却是一次有针对性的演变。事实证明，此做法收到了很好的效果。

4 一题多问，纵向拓展

在高三复习中，能够善于一题多问，对某一问题提出富有思考性的、有研究价值的问题，引导学生不断地猜想类比、拓展引申、分析归纳，进而得出新的命题，可以将学生从被动的题海圈里解放出来，获得学习主动权，提高解题的技巧与能力，这也是培养学生求异思维能力的有效途径。

例6 如图4，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$，D_1 为 A_1C_1 的中点。

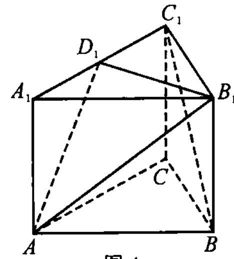


图4

题组1：

(1)求证：BC_1 // 平面 AB_1D_1；

(2)求证：平面 $AB_1D_1\perp$平面 AA_1C_1C；

题组2：

(3)求直线 A_1B_1 与平面 AB_1D_1 所成角大小；

(4)求二面角 $A_1\text{-}AB_1\text{-}D_1$ 的大小；

(5)求异面直线 B_1D_1与 BC_1 所成角；

题组3：

(6)求点 D_1 到直线 AB 的距离；

(7)求点 B 到平面 AB_1D_1 的距离；

(8)求异面直线 B_1D_1 与 BC_1 的距离。

分析：这是一道立体几何综合问题，包含了直线与平面的平行与垂直的论证、空间角与空间距离的求解等立体几何核心内容，解决问题的过程中充分体现了直线与平面间平行、垂直的等价转化，空间角与平面角的等价转化以及距离之间的等价转化。

评注：通过一题多问，可以引导学生从多侧面、多角度、多渠道地研究问题，不但能开阔学生的解题思路，而且能够帮助学生拓展前后知识的联系，做到“遇新题、忆旧题、多思考、善联想、多变换、找规律”，更好地培养学生的应变能力和创造性思维能力。

综上所述，高三复习课的教学要善于采用多种形式的变式教学，实现知识从一个问题到另一个问题的迁移，便于学生寻求其内在规律，起到举一反三、触类旁通的效果。同时也能够给学生以新鲜感，唤起学生的求知欲和好奇心，开拓学生的视野，激励学生深入探究，训练学生思维的发散性，更有助于培养学生的创新意识，提高高三复习课教学的有效性.

参考文献：

[1] 张孝梅.高三数学二轮复习应重视对教材习题的改造与深化[J].延边教育学院学报，2007，21(6)：106-108.

[2] 吴莉霞，刘斌.变式教学要把握三个“度”[J].数学通讯，2006(4)：18-19.

[3] 俞少洪.变式教学是提高数学课堂效率的有效途径[J].数学通报，2006(4)：42-43.