

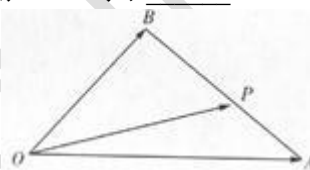
仪征中学高一数学小练 28

一、选择题（本大题共 3 小题，共 15.0 分）

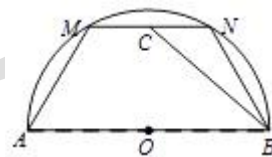
1. 已知 $A = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\}$, $B = \{x | y = \sqrt{x-3}\}$, 则 $A \cup B =$
A. $[1, +\infty)$ B. $[0, +\infty)$ C. $[0, 1]$ D. $[3, +\infty)$
2. 已知弧度数为 $\frac{\pi}{3}$ 的圆心角所对的弦长为 2, 则这个圆心角所对的弧长是 ()
A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$
3. 若向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 两两所成的角相等, 且 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=3$, 则 $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 等于 ()
A. 2 B. 5 C. 2 或 5 D. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

4. 已知集合 $M = \{(x, y) | x+y=3\}$, $N = \{(x, y) | x-y=5\}$, 则 $M \cap N$ 等于_____.
5. 如图, 在 $\triangle OAB$ 中, P 为线段 AB 上的一点, $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 且 $\vec{BP} = 2\vec{PA}$, 则 $x + 2y =$ _____.



6. 如图, 等腰梯形 $AMNB$ 内接于半圆 O , 直径 $AB=4$, $MN=2$, MN 的中点为 C , 则 $\vec{AM} \cdot \vec{BC}$ 的值为_____.



7.

8. 已知 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{3}{5}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sin(\pi + \alpha) =$ _____.

9. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x - 3)$ 的单调递增区间是_____.

10. 已知函数 $f(x) = \lg \frac{ax+a-2}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题（本大题共 3 小题，共 36.0 分）

11. 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

(1) 求 $\sin 2\alpha$ 的值;

(2) 若 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $\sin \beta$ 的值.

12. 已知 $f(x) = \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 求函数 $f(x)$ 的对称轴方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间.

13. 已知函数 $f(x) = \log_4 \frac{x-1}{x+1}$.

(I) 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 求 a 的值;

(II) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明你的结论.

答案和解析

1. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题主要考查集合的并集运算.关键是理解函数的定义域与值域.

【解答】

解:因为 $A = \{y|y=x^2+1\} = \{y|y \geq 1\}$,

$B = \{x|y=\sqrt{x-3}\} = \{x|x \geq 3\}$,

所以 $A \cup B = [1, +\infty)$,

故选 A.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题考查弧长公式, 求解本题的关键是利用弦心距,

弦长的一半, 半径构成一个直角三角形求半径, 属基

础题. 连接圆心与弦的中点, 可得半弦长 $AD=1$,

$\angle AOD = \frac{\pi}{6}$, 解得半径为 2, 代入弧长公式求弧长即可.

【解答】

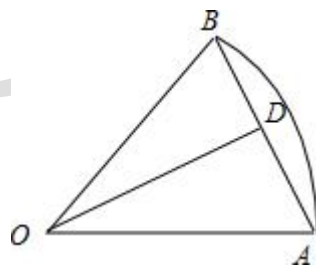
解:连接圆心 O 与弦的中点 D,

则由题意可得 $AD=1$, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, $\angle AOD = \frac{\pi}{6}$,

在 $RT\triangle AOD$ 中, 半径 $OA=2$,

由弧长公式可得所求弧长 $l = \frac{\pi}{3} \cdot 2 = \frac{2\pi}{3}$.

故选 B.



3. 【答案】C

【解析】

解:由于平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两所成的角相等, 故每两个向量成的角都等于 120° , 或都等于 0° ,

再由 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1, |\vec{c}|=3$,

①若平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两所成的角相等, 且都等于 120° ,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \times 3 \times \cos 120^\circ = -\frac{3}{2},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \times 3 \times \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 9 + 2(-\frac{1}{2}) + 2(-\frac{3}{2}) + 2(-\frac{3}{2})} = 2. \end{aligned}$$

②平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两所成的角相等, 且都等于 0° ,

$$\text{则 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 = 1, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \times 3 = 3, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \times 3 = 3,$$

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}} = \\ &= \sqrt{1 + 1 + 9 + 2 + 6 + 6} = 5. \end{aligned}$$

综上所述可得, 则 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2$ 或 5 ,

故选 C.

由题意可得每两个向量成的角都等于 120° , 或都等于 0° , 再由

$|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1, |\vec{c}|=3$, 由此分别求得 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 、 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ 的值, 再根据

$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}}$, 运算求得结果

本题主要考查两个向量的数量积的定义, 求向量的模, 体现了分类讨论的数学思想, 属于基础题.

4. 【答案】 $\{(4, -1)\}$

【解析】

解: 集合 $M = \{(x, y) | x + y = 3\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 5\}$,

可得 $M \cap N = \{(x, y) | \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 5 \end{cases}\} = \{(4, -1)\}$,

故答案为: $\{(4, -1)\}$.

运用集合的交集的定义, 解方程组, 即可得到所求集合.

本题考查集合的交集的求法, 注意运用定义法和点集表示, 考查运算能力, 属于基础题.

5. 【答案】 $\frac{4}{3}$

【解析】

【分析】

本题考查了向量三角形法则、向量基本定理,考查了推理能力与计算能力,

属于中档题,由 $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$,利用向量三角形法则可得 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})$,再利用向量基本定理即可得出.

【解答】

解: $\because \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$,

$\therefore \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} = 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP})$,

化为 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$,

与 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ 比较可得: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$.

故答案为 $x+2y = \frac{4}{3}$.

6. 【答案】1

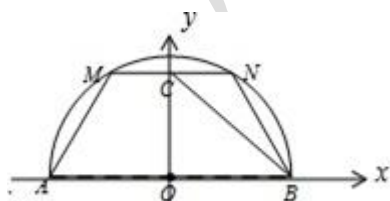
【解析】

【分析】

本题考查平面向量的坐标运算及数量积运算,建立直角坐标系,然后写出点的坐标,得向量的坐标即可求解.

【解答】

解: 以 O 为原点, 以 AB 为 x 轴建立坐标系, 如图所示,



由已知求得 M, N 到 AB 的距离为 $\sqrt{3}$,

则 $A(-2, 0)$, $M(-1, \sqrt{3})$, $B(2, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$,

$$\therefore \vec{AM} = (1, \sqrt{3}), \vec{BC} = (-2, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \vec{AM} \cdot \vec{BC} = (1, \sqrt{3}) \cdot (-2, \sqrt{3}) = 1.$$

故答案为 1.

7. 【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】

本题主要考查利用诱导公式进行化简求值, 属于基础题. 由条件利用诱导公式进行化简所给的式子, 可得结果.

【解答】

$$\text{解:} \because \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{3}{5}, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha = -\frac{4}{5},$$

故答案为 $-\frac{4}{5}$.

8. 【答案】 (2, 3)

【解析】

$$\text{解:} \because \text{函数 } y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x - 3),$$

$$\therefore -x^2 + 4x - 3 > 0, \text{ 解得 } 1 < x < 3,$$

$\therefore t = -x^2 + 4x - 3$ 是开口向下, 对称轴为 $x = 2$ 的抛物线,

$\therefore$ 由复合函数的单调性的性质知函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x - 3)$ 的单调递增区间是 (2, 3).

故答案为: (2, 3).

由函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x - 3)$, 知 $-x^2 + 4x - 3 > 0$, 由 $t = -x^2 + 4x - 3$ 是开口向下, 对称

轴为 $x = 2$ 的抛物线, 利用复合函数的单调性的性质能求出函数

$y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 4x - 3)$ 的单调递增区间.

本题考查复合函数的单调性的求法, 解题时要认真审题, 注意等价转化思想的合理运用.

9. 【答案】(1,2)

【解析】

【分析】

本题考查复合函数单调性的判断规则, 利用复合函数的判断规则将单调性转化为关于参数的不等式解参数的范围, 由题意得转化为 $g(x)=a+\frac{a-2}{x}$ 在区间 (1,2) 是增函数, 且 $g(1)>0$, 即可得出结果.

【解答】

解: 因为 $f(x)=lg(a+\frac{a-2}{x})$ 在区间 (1,2) 上是增函数,

所以 $g(x)=a+\frac{a-2}{x}$ 在区间 (1,2) 是增函数, 且 $g(1)>0$,

于是 $a-2<0$ 且 $2a-2>0$,

解得 $1<a<2$,

故答案为 (1, 2).

10. 【答案】解: (1) $\because \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 且 $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

(2) $\because \sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\therefore \alpha + \beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$,

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} = -\frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot (-\frac{2\sqrt{2}}{3}) - (-\frac{4}{5}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{6\sqrt{2} + 4}{15}.$$

【解析】

本题主要考查同角三角函数的基本关系, 三角函数在各个象限中的符号, 二

倍角的正弦公式, 以及两角和差的正弦公式的应用, 属于基础题.

(1) 利用同角三角函数的基本关系, 三角函数在各个象限中的符号, 求得 $\cos \alpha$ 的值, 再利用二倍角的正弦公式求得 $\sin 2\alpha$ 的值.

(2) 先确定 $\alpha + \beta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 可得 $\cos(\alpha + \beta)$ 的值, 再根据 $\sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha]$, 利

用两角差的正弦公式求得结果.

11. 【答案】解: (1) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}(1+\cos 2x)}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{3})$$

由 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

所以函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

(2) 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

得: $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$

所以函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间为 $[0, \frac{\pi}{12}]$ 和 $[\frac{7\pi}{12}, \pi]$

【解析】

本题考查了三角恒等变换以及三角函数的图象与性质的应用问题, 是基础题.

(1) 化函数 $f(x)$ 为正弦型函数, 再求它的对称轴方程;

(2) 根据正弦函数的单调性, 求出 $f(x)$ 的单调递增区间, 再与 $[0, \pi]$ 取交集.

12. 【答案】解: (I) $\because$ 函数 $f(x) = \log_4 \frac{x-1}{x+1}$, $f(a) = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \log_4 \frac{a-1}{a+1} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{a-1}{a+1} = 2,$$

解得: $a = -3$;

(II) 函数 $f(x)$ 为奇函数, 理由如下:

函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 关于原点对称,

$$\text{且 } f(-x) + f(x) = \log_4 \frac{-x-1}{-x+1} + \log_4 \frac{x-1}{x+1} = 0,$$

即 $f(-x) = -f(x)$,

故函数 $f(x)$ 为奇函数.

【解析】

(I) 若 $f(a) = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{a-1}{a+1} = 2$, 解得 a 的值;

(II) 函数 $f(x)$ 为奇函数, 结合函数奇偶性的定义和对数的运算性质, 可得答案.

本题考查的知识点是函数的奇偶性, 对数函数的图象和性质, 函数求值, 难度中档.