

江苏省仪征中学 2020 届高三上学期数学周末自助餐(1)

班级_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

一、填空题：

1. 设全集 $U = \{x | x \geq 2, x \in \mathbf{N}\}$ ，集合 $A = \{x | x^2 \geq 5, x \in \mathbf{N}\}$ ，则 $\complement_U A =$ _____.
2. 函数 $f(x) = \log_2(-x^2 + 2\sqrt{2})$ 的值域为_____.
3. 定义在区间 $[0, 3\pi]$ 上的函数 $y = \sin 2x$ 的图象与 $y = \cos x$ 的图象的交点个数是_____.
4. 在 $\triangle ABC$ 中， $a = 5$ ， $b = 8$ ， $C = 60^\circ$ ，则 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$ 的值为_____.
5. 函数 $y = a \sin(ax + \theta)$ ($a > 0$ ， $\theta \neq 0$) 图象上的一个最高点和其相邻最低点的距离的最小值为_____.
6. 在锐角三角形 ABC 中， $BC = 1$ ， $B = 2A$ ，则 AC 的取值范围是_____.
7. 若动点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 分别在直线 $l_1: x - y - 5 = 0$ ， $l_2: x - y - 15 = 0$ 上移动，则 P_1P_2 的中点 P 到原点的距离的最小值是_____.
8. 如果定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足：对于任意 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$ ，则称 $f(x)$ 为“ H 函数”. 给出下列函数：① $y = x + 1$ ；② $y = x^2 + 1$ ；③ $y = e^x + 1$ ；④ $y = \begin{cases} \ln |x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其中“ H 函数”的序号是_____.
9. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l: 3x - 4y + 5 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 10x = 0$ 交于 A, B 两点， P 为 x 轴上一动点，则 $\triangle ABP$ 周长的最小值为_____.
10. 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上且周期为 3 的函数，当 $x \in [0, 3)$ 时 $f(x) = |x^2 - 2x + \frac{1}{2}|$ ， $y = f(x) - a$ 在区间 $[-3, 4]$ 上有 10 个零点（互不相同），则实数 a 的取值范围是_____.

二、解答题：

11. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -16$. 求：

- (1) AB 的值； (2) $\frac{\sin(A-B)}{\sin C}$ 的值.

12. 已知函数 $f(x) = e^x$ ， $g(x) = ax^2 + bx + 1$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

- (1) 当 $a \neq 0$ 时，则 a, b 满足什么条件，曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $x = 0$ 处总有相同的切线？
(2) 当 $a = 1$ 时，求函数 $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ 的单调减区间；
(3) 当 $a = 0$ 时，若 $f(x) \geq g(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，求 b 的取值的集合.

参考答案：

1. {2}; 2. $(-\infty, \frac{3}{2}]$;

3. 【提示】由 $\sin 2x = \cos x \Rightarrow \cos x = 0$ 或 $\sin x = \frac{1}{2}$,

$\therefore x \in [0, 3\pi]$, $\therefore x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$, 共 7 个.

4. 【提示】由题意可知 $\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle = 120^\circ$, 故 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle = 5 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -20$.

5. 【提示】取函数 $y = a \sin(ax + \theta)$ ($a > 0, \theta \neq 0$) 的最大值为 a , 周期为 $T = \frac{2\pi}{a}$, 所以同一周期内相邻

的最高点与最低点的距离为: $\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 4a^2} \geq \sqrt{2\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \times 4a^2} = 2\sqrt{\pi}$ (当且仅当 $a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 时,

等号成立), 故答案为 $2\sqrt{\pi}$.

6. 【提示】由正弦定理得 $AC = \frac{BC}{\sin A} \sin B = 2 \cos A$. 而 $\begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < 2A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \pi - A - 2A < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

所以 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$, 从而 $AC \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

7. 【提示】由题意得 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程是 $x - y - 10 = 0$, 则原点到直线 $x - y - 10 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|-10|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$, 即点 P 到原点距离的最小值为 $5\sqrt{2}$.

8. 【提示】 $\because x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1)$, $\therefore (x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$, $\therefore x_1 - x_2, f(x_1) - f(x_2)$ 同号, 即函数 $f(x)$ 是单调递增函数, ① $y = x + 1$ 是定义在 \mathbf{R} 上的增函数, 满足条件; ② $y = x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上, 函数单调递减, 不满足条件; ③ $y = e^x + 1$ 是定义在 \mathbf{R} 上的增函数, 满足条件;

④ $y = \begin{cases} \ln |x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 当 $x > 0$ 时, 函数单调递增, 当 $x < 0$ 时, 函数单调递减, 不满足条件, 综上所述满足“H 函数”条件的函数为 ①③, 故答案为 ①③.

9. 【提示】设直线 l 与圆 C 的一个交点 $B(5, 5)$ 关于 x 轴的对称点为 B' , 易知 BB' 恰为圆 C 的直径, 记 AB' 与 x 轴交于点 Q , 则 $PA + PB = PA + PB' \geq AB'$, 所以 $\triangle ABP$ 的周长的最小值为 $AB + AB'$,

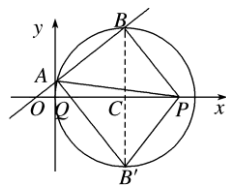
又由点到直线的距离公式可得, 圆心到直线 $3x - 4y + 5 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|3 \times 5 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4$,

所以由圆的弦长公式可得, $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$,

又在 $\text{Rt}\triangle ABB'$ 中, $AB = 6, BB' = 10$, 所以 $AB' = \sqrt{BB'^2 - AB^2} = 8$,

所以 $\triangle ABP$ 的周长的最小值为 14.

10. 【提示】根据题目条件, 数形结合, 即转化为通过找 $y = f(x)$ 与



$y = a$ 的图象交点去推出零点, 先画出 $[0, 3]$ 上 $y = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ 的图像, 再将 x 轴下方的图象翻折到上方, 利用周期为 3, 将图象复制粘贴至 $[-3, 4]$, 发现若 $f(x)$ 图象要与 $y = a$ 有 10 个不同的交点, 则 $a \in (0, \frac{1}{2})$.

11. 【解】 (1) (方法 1) 因为 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 9$, $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -16$, 4 分

所以 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 9 + 16 = 25$, 即 $\overline{AB}(\overline{AC} + \overline{CB}) = 25$, 亦即 $\overline{AB}^2 = 25$, 故 $AB = 5$ 7 分

(方法 2) 设 A, B, C 的对边依次为 a, b, c , 则由条件得 $b c \cos A = 9$, $a c \cos B = 16$ 3 分

两式相加得 $c(b \cos A + a \cos B) = 9 + 16 = 25$, 即 $c^2 = 25$, 故 $AB = c = 5$ 7 分

(方法 3) 设 A, B, C 的对边依次为 a, b, c , 则由条件得 $b c \cos A = 9$, $a c \cos B = 16$ 3 分

由余弦定理得 $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = 9$, $\frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2) = 16$, 两式相加得 $c^2 = 25$, 故 $AB = c = 5$ 7 分

$$(2) \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\sin C} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{\sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a \cos B - b \cos A}{c} = \frac{a c \cos B - b c \cos A}{c^2} = \frac{16-9}{c^2} = \frac{7}{25}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

12. 【解】 (1) $\because f'(x) = e^x$, $\therefore f'(0) = 1$, 又 $f(0) = 1$,

$\therefore y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = x + 1$,

又 $\because g'(x) = 2ax + b$, $\therefore g'(0) = b$, 又 $g(0) = 1$,

$\therefore y = g(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y = bx + 1$,

\therefore 当 $a \neq 0, a \in R$ 且 $b = 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在 $x = 0$ 处总有相同的切线.....4 分

$$(2) \text{ 由 } a = 1, h(x) = \frac{x^2 + bx + 1}{e^x}, \therefore h'(x) = \frac{-x^2 + (2-b)x + b - 1}{e^x},$$

$$\therefore h'(x) = \frac{-x^2 + (2-b)x + b - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)(x-(1-b))}{e^x}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

由 $h'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = 1 - b$,

\therefore 当 $b > 0$ 时, 函数 $y = h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 1 - b), (1, +\infty)$;

当 $b = 0$ 时, 函数 $y = h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, +\infty)$;

当 $b < 0$ 时, 函数 $y = h(x)$ 的减区间为 $(-\infty, 1), (1 - b, +\infty)$10 分

(3) 由 $a = 1$, 则 $\varphi(x) = f(x) - g(x) = e^x - bx - 1$, $\therefore \varphi'(x) = e^x - b$,

① 当 $b \leq 0$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, 函数 $\varphi(x)$ 在 R 单调递增,

又 $\varphi(0) = 0$, $\therefore x \in (-\infty, 0)$ 时, $\varphi(x) < 0$, 与函数 $f(x) \geq g(x)$ 矛盾,12 分

② 当 $b > 0$ 时, $\therefore \varphi'(x) > 0, x > \ln b; \therefore \varphi'(x) < 0, x < \ln b$

\therefore 函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, \ln b)$ 单调递减; $(\ln b, +\infty)$ 单调递增,

(I) 当 $0 < b < 1$ 时, $\therefore \ln b < 0$, 又 $\varphi(0) = 0$, $\therefore \varphi(\ln b) < 0$, 与函数 $f(x) \geq g(x)$ 矛盾,

(II) 当 $b > 1$ 时, 同理 $\varphi(\ln b) < 0$, 与函数 $f(x) \geq g(x)$ 矛盾,

(III) 当 $b = 1$ 时, $\ln b = 0$, \therefore 函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减; $(0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore \varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$, 故 $b = 1$ 满足题意.

综上所述, b 的取值的集合为 $\{1\}$16 分