

江苏省仪征中学 2021—2022 学年度第一学期高三数学单元练习 3

考试范围: 函 数

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 评价 _____

一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 已知 $a = 2^{\frac{4}{3}}$, $b = 3^{\frac{2}{3}}$, $c = 25^{\frac{1}{3}}$, 则()

- A.
- $b < a < c$
- B.
- $a < b < c$
- C.
- $b < c < a$
- D.
- $c < a < b$

2. 我国明代程大位的《算法统宗》是一本流传很广的著作,书中许多题目都用诗歌体叙述,读起来朗朗上口,下面这个问题便是其中有名的一个;“九百九十九文钱,甜果苦果买一千.四文钱买苦果七,十一文钱九个甜,甜苦两果各几个?请君布算莫迟延!”则所买甜果的个数为()

- A. 343 B. 345 C. 567 D. 657

3. 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是()

- A.
- $(-\infty, -2)$
- B.
- $(-\infty, -1)$
- C.
- $(1, +\infty)$
- D.
- $(4, +\infty)$

4. 函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数. 且在 $x \in (0, +\infty)$ 上为增函数, 则实数 m 的值是()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

5. 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是()

- A.
- $(0, 1)$
- B.
- $(1, 2)$
- C.
- $(3, 4)$
- D.
- $(4, +\infty)$

6. (2019 浙江卷) 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0. \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - ax - b$ 恰

有 3 个零点, 则()

- A.
- $a < -1, b < 0$
- B.
- $a < -1, b > 0$
- C.
- $a > -1, b < 0$
- D.
- $a > -1, b > 0$

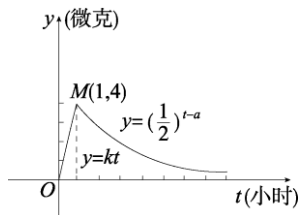
7. 某医药研究所开发一种新药, 如果成年人按规定的剂量服用, 据监测, 服药后每毫升血液中的含药量 y (微克) 与时间 t (小时) 之间近似满足如图 4.7 2 所示的曲线. 据进一步测定, 每毫升血液中含药量不少于 0.25 微克时, 治疗疾病有效, 则服药一次治疗该疾病有效的时间为()

图 4.7 2

- A. 4 小时 B.
- $4\frac{7}{8}$
- 小时 C.
- $4\frac{15}{16}$
- 小时 D. 5 小时

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2 + a, & x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x > 1 \end{cases}$ 有最大值, 则 a 的取值范围为()

- A.
- $(-5, +\infty)$
- B.
- $[-5, +\infty)$
- C.
- $(-\infty, -5)$
- D.
- $(-\infty, -5]$

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9. 下列说法中正确命题为()

- A. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 与 $g(x) = x$ 的图象没有公共点
- B. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x-1)$, 则函数 $f(x)$ 周期为 6
- C. 若对于任意 $x \in (1,3)$, 不等式 $x^2 - ax + 2 < 0$ 恒成立, 则 $a > \frac{11}{3}$
- D. 函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则 $a \in (-4,0)$

10. 某食品的保鲜时间 t (单位: 小时)与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$)满足函数关系 $t = \begin{cases} 64, & x \leq 0, \\ 2^{kx+6}, & x > 0, \end{cases}$ 且

该食品在 4°C 的保鲜时间是 16 小时. 已知甲在某日上午 10 时购买了该食品, 并将其遗放在室外, 且此日的室外温度随时间变化如图 4.7-3 所示. 给出以下四个结论, 其中, 所有正确结论的是()

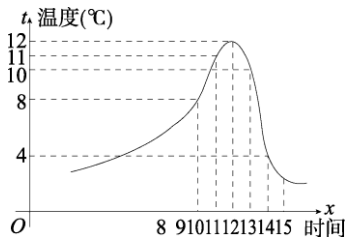


图 4.7 3

- A. 该食品在 6°C 的保鲜时间是 8 小时
 - B. 当 $x \in [-6,6]$ 时, 该食品的保鲜时间 t 随着 x 增大而逐渐减少
 - C. 到了此日 13 时, 甲所购买食品还在保鲜时间内
 - D. 到了此日 14 时, 甲所购买食品已然过了保鲜时间
11. 下列命题中正确的是()
- A. 在同一坐标系中, $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图像关于 x 轴对称
 - B. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$
 - C. 函数 $y = \frac{x+1}{x+2}$ 的图像关于点 $(-2,1)$ 对称
 - D. 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 只有两个零点
12. 下列命题中不正确的是()
- A. 若函数 $y = 2^x$ 的定义域是 $\{x|x \leq 0\}$, 则它的值域是 $\{y|y \leq 1\}$
 - B. 若函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x|x > 2\}$, 则它的值域是 $\left\{y|y \leq \frac{1}{2}\right\}$
 - C. 若函数 $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, 则它的定义域一定是 $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$
 - D. 若函数 $y = \log_2 x$ 的值域是 $\{y|y \leq 3\}$, 则它的定义域是 $\{x|0 < x \leq 8\}$

二、填空题(本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 函数 $f(x) = -x^2 + x - \lg x$ 的零点个数为_____.

14. 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

15. 《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表. 其中《方田》章给出计算弧田面积所用的经验公式为: 弧田面积 $= \frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$. 弧田由圆弧和其所对弦所围成, 公式中“弦”指圆弧所对弦长, “矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差. 按照上述经验公式计算所得弧田面积与实际面积之间存在误差. 现有圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$, 弦长等于 9 米的弧田. 则矢长为_____米; 按照《九章算术》中弧田面积的经验公式计算所得弧田面积与实际面积的差为_____平方米.

16. (2020 · 如皋模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & e^{-2} \leq x < e, \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 2x$, 设 a 为实数, 若存在实数 m , 使 $f(m) - 2g(a) = 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题(本大题共 6 小题,共 70 分)

17. (2019 · 北京卷) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 求 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1}$ 的图象关于原点对称, 其中 a 为常数.

(1) 求 a 的值;

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 在 $[2, 3]$ 上有解, 求 k 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 m 取何值时方程 $|f(x) - 2| = m$ 有一个解? 两个解?

(2) 若不等式 $[f(x)]^2 + f(x) - m > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 求 m 的取值范围.

20. (2020 • 石家庄模拟) 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2ex + t - 1$, $g(x) = x + \frac{e^2}{x} (x > 0)$, 其中 e 表示自然对数的底数.

(1) 若 $g(x) = m$ 有实根, 求 m 的取值范围;

(2) 确定 t 的取值范围, 使得 $g(x) - f(x) = 0$ 有两个相异实根.

令 $t = x^2 - 2x - 8$, 则 $y = \ln t$, 在定义域内单调递增,

而 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $t = x^2 - 2x - 8$ 为减函数, $x \in (4, +\infty)$ 时, $t = x^2 - 2x - 8$ 为增函数, 故函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 $(4, +\infty)$. 故选 D.

4 函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数 且在 $x \in (0, +\infty)$ 上为增函数 则实数 m 的值是()

A . 2

B . 3

C . 4

D . 5

答案 A

解析 要使函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^m$ 是幂函数, 且在 $x \in (0, +\infty)$ 上为增函数, 则

$$\begin{cases} m^2 - m - 1 = 1, \\ m > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } m = 2. \text{ 故选 A.}$$

5 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是()

A . (0,1)

B . (1,2)

C . (3,4)

D . (4, +\infty)

答案 C

解析 $\because$ 连续减函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$, $\therefore f(3) = 2 - \log_2 3 > 0$, $f(4) = \frac{6}{4} - \log_2 4 < 0$, $\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{6}{x} - \log_2 x$ 的零点所在的区间是 $(3, 4)$, 故选 C.

6 (2019 浙江卷) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax, & x \geq 0. \end{cases}$ 若函数 $y = f(x) - ax$

$- b$ 恰有 3 个零点, 则()

A . $a < -1, b < 0$

B . $a < -1, b > 0$

C . $a > -1, b < 0$

D . $a > -1, b > 0$

答案 C

解析 当 $x < 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = x - ax - b = (1-a)x - b = 0$, 得 $x = \frac{b}{1-a}$,

则 $y = f(x) - ax - b$ 最多有一个零点;

当 $x \geq 0$ 时, $y = f(x) - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax - ax - b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 - b$,

$$y' = x^2 - (a+1)x,$$

$4\frac{15}{16}$ 小时

D. 5 小时

答案 C

解析 由题意, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 函数图象是一个线段, 由于过原点与点(1,4), 故其解析式为 $y=4t, 0 \leq t \leq 1$;

当 $t \geq 1$ 时, 函数的解析式为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-a}$, 此时 $M(1,4)$ 在曲线上, 将此点的坐标代入函数解析式得 $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a}$, 解得 $a=3$, 故函数的解析式为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}, t \geq 1$.

$$\text{所以 } y=f(t)=\begin{cases} 4t(0 \leq t < 1), \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3}(t \geq 1), \end{cases}$$

$$\text{令 } f(t) \geq 0.25, \text{ 即 } \begin{cases} 4t \geq 0.25, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{t-3} \geq 0.25, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} t \geq \frac{1}{16}, \\ t \leq 5, \end{cases} \therefore \frac{1}{16} \leq t \leq 5. \therefore \text{服药一次治疗疾病有效的时间为 } 5 - \frac{1}{16} = 4\frac{15}{16} \text{ 个小时. 故选 C.}$$

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+2+a, & x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x > 1 \end{cases}$$

8 若函数 $f(x) =$

有最大值, 则 a 的取值范围为()

A. $(-5, +\infty)$

B. $[-5, +\infty)$

C. $(-\infty, -5)$

D. $(-\infty, -5]$

答案 B

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+2+a, & x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & x > 1 \end{cases}$$

解析 函数 $f(x) =$

当 $x \leq 1$ 时, 函数是增函数, $x > 1$ 时, 函数是减

函数, 由题意可得: $f(1) = a + 4 \geq \log_{\frac{1}{2}}(1+1) = -1$, 解得 $a \geq -5$. 故选 B.

二、多项选择题

9 下列说法中正确命题为()

A. 函数 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ 与 $g(x) = x$ 的图象没有公共点

B. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x-1)$, 则函数 $f(x)$ 周期为 6

C. 若对于任意 $x \in (1, 3)$, 不等式 $x^2 - ax + 2 < 0$ 恒成立, 则 $a > \frac{11}{3}$

D. 函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则 $a \in (-4, 0)$

答案 AB

解析 令 $f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = x$, 去分母的 $x^2 = -1$,

可得方程无解即图象无交点, A 正确;

由 $f(x+2) = -f(x-1)$, 将 x 换成 $x+1$ 可得 $f(x+3) = -f(x)$ ①, 再将此式中 x 换成 $x+3$, 得 $f(x+6) = -f(x+3)$ ②, 由①②得 $f(x+6) = f(x)$, 从而可得函数的周期为 6, B 正确; 由任意 $x \in (1, 3)$, 不等式 $x^2 - ax + 2 < 0$ 恒成立 $\Rightarrow a > x + \frac{2}{x}$ 在 $(1, 3)$ 上恒成立, 函数 $y = x + \frac{2}{x}$ 在 $(1, \sqrt{2})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{2}, 3)$ 上单调递增, $f(1) = 3$, $f(3) = \frac{11}{3}$, $f(3) > f(1)$,

$\therefore a \geq \frac{11}{3}$, “=” 可以取到, 故 C 错误;

函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 即 $x^2 - ax - a$ 可取 $(0, +\infty)$ 之间的一切值, $\therefore \Delta = a^2 + 4a \geq 0$, 解得 $a \in [0, +\infty) \cup (-\infty, -4]$, $\therefore a \in (-4, 0)$ 不正确, 故 D 错误. 故选 AB.

10 某食品的保鲜时间 t (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $t = \begin{cases} 64, & x \leq 0, \\ 2^{kx+6}, & x > 0, \end{cases}$

且该食品在 4°C 的保鲜时间是 16 小时. 已知甲在某日上午 10 时购买了该食品, 并将其遗放在室外,

且此日的室外温度随时间变化如图 4.7.3 所示. 给出以下四个结论, 其中, 所有正确结论的是()

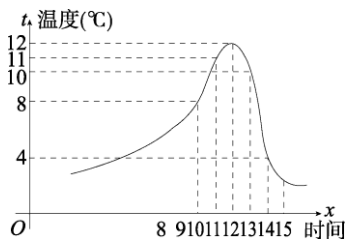


图 4.7.3

A. 该食品在 6°C 的保鲜时间是 8 小时

B. 当 $x \in [-6, 6]$ 时, 该食品的保鲜时间 t 随着 x 增大而逐渐减少

C. 到了此日 13 时, 甲所购买的食物还在保鲜时间内

D. 到了此日 14 时, 甲所购买食品已然过了保鲜时间

答案 AD

解析 $\because$ 食品的保鲜时间 t (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足函数关系 $t = \begin{cases} 64, & x \leq 0 \\ 2^{kx+6}, & x > 0 \end{cases}$,

且该食品在 4°C 的保鲜时间是 16 小时.

$$\therefore 2^{4k+6} = 16, \text{ 即 } 4k+6=4, \text{ 解得: } k = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore t = \begin{cases} 64, & x \leq 0, \\ 2 - \frac{1}{2}x + 6, & x > 0, \end{cases} \quad \text{当 } x=6 \text{ 时, } t=8, \text{ 故 A 该食品在 } 6^{\circ}\text{C} \text{ 的保鲜时间是 8 小时, 正确;}$$

B 当 $x \in [-6, 0]$ 时, 保鲜时间恒为 64 小时, 当 $x \in (0, 6]$ 时, 该食品的保鲜时间 t 随着 x 增大而逐渐减少, 故错误; C 到了此日 10 时, 温度超过 8 度, 此时保鲜时间不超过 4 小时, 故到 13 时, 甲所购买食品不在保鲜时间内, 故错误; D 到了此日 14 时, 甲所购买食品已然过了保鲜时间, 故正确, 故选 AD.

11 下列命题中正确的是()

A. 在同一坐标系中, $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象关于 x 轴对称

B. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$

C. 函数 $y = \frac{x+1}{x+2}$ 的图象关于点 $(-2, 1)$ 对称

D. 函数 $f(x) = 2^x - x^2$ 只有两个零点

答案 ABC

解析 A. 在同一坐标系中, $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象关于 x 轴对称, 故 A 正确;

B. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$, 令 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t, t = -x^2 + 1$,

$\therefore t = -x^2 + 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ 单调递减,

$\therefore$ 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ 函数在 $x=0$ 处取得最小值是 $\frac{1}{2}$, 故 B 正确;

C. 函数 $y = \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$ 的图象关于点 $(-2, 1)$ 对称, 故 C 正确;

D. $\because f(-1) < 0, f(0) > 0$, 则函数 $y = 2^x - x^2$ 在 $(-1, 0)$ 有一个零点, 又 $f(2) = f(4) = 0$, $\therefore$ 至少有三个零点, 故 D 不正确. 故选 ABC.

12 下列命题中不正确的是()

A. 若函数 $y = 2^x$ 的定义域是 $\{x|x \leq 0\}$, 则它的值域是 $\{y|y \leq 1\}$

B. 若函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x|x > 2\}$, 则它的值域是 $\left\{y|y \leq \frac{1}{2}\right\}$

C. 若函数 $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, 则它的定义域一定是 $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$

D. 若函数 $y = \log_2 x$ 的值域是 $\{y|y \leq 3\}$, 则它的定义域是 $\{x|0 < x \leq 8\}$

答案 ABC

解析 A. 函数 $y = 2^x$ 的定义域 $x \leq 0$, 值域 $y = 2^x \in (0, 1]$, A 错误;

B. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的定义域是 $\{x|x > 2\}$,

值域 $y = \frac{1}{x} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, B 错误;

C. 函数 $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, $y = x^2$ 的值域是 $\{y|0 \leq y \leq 4\}$, 但它的定义域不一定是 $\{x|-2 \leq x \leq 2\}$, C 错误;

D. 函数 $y = \log_2 x$ 的值域是 $\{y|y \leq 3\}$, $y = \log_2 x \leq 3$, $\therefore 0 < x \leq 8$, D 正确. 故选 ABC.

三、填空题

13 函数 $f(x) = -x^2 + x - \lg x$ 的零点个数为_____.

答案 1

解析 由已知可得 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$,

函数 $f(x)$ 的零点的个数即函数 $y = -x^2 + x$ 与函数 $y = \lg x$ 图象交点的个数,

画出两函数的图象如图 4.7 4 所示,

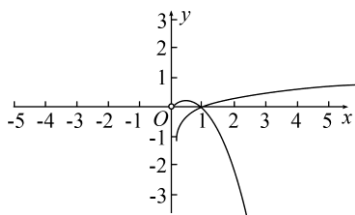


图 4.7 4

由图象得两函数只有一个交点, 所以 $f(x)$ 只有一个零点. 故答案为 1.

14 若函数 $f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.

答案 1

解析 $\because f(x) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ 为偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore (-x) \ln(-x + \sqrt{a + x^2}) = x \ln(x + \sqrt{a + x^2}),$$

$$\therefore -\ln(-x + \sqrt{a + x^2}) = \ln(x + \sqrt{a + x^2}),$$

$$\therefore \ln(-x + \sqrt{a + x^2}) + \ln(x + \sqrt{a + x^2}) = 0,$$

$$\therefore \ln[(\sqrt{a + x^2} + x)(\sqrt{a + x^2} - x)] = 0,$$

$$\therefore \ln a = 0, \therefore a = 1. \text{ 故答案为 } 1.$$

15 《九章算术》是我国古代数学成就的杰出代表. 其中《方田》章给出计算弧田面积所用

的经验公式为: 弧田面积 $= \frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2)$. 弧田由圆弧和其所对弦所围成, 公式中“弦”指圆弧

所对弦长, “矢”等于半径长与圆心到弦的距离之差. 按照上述经验公式计算所得弧田面积与其实

际面积之间存在误差. 现有圆心角为 $\frac{2}{3}\pi$, 弦长等于 9 米的弧田. 则矢长为_____米; 按照《九章

算术》中弧田面积的经验公式计算所得弧田面积与实际面积的差为_____平方米.

答案 $\frac{1}{2}r - \frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{8} - 9\pi$

解析 扇形半径 $r = 3\sqrt{3}$,

扇形面积等于 $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3})^2 = 9\pi (\text{m}^2)$,

弧田面积 $= 9\pi - \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{3} = 9\pi - \frac{27\sqrt{3}}{4} (\text{m}^2)$,

圆心到弦的距离等于 $\frac{1}{2}r$, 所以矢长为 $\frac{1}{2}r$.

按照上述弧田面积经验公式计算得 $\frac{1}{2}(\text{弦} \times \text{矢} + \text{矢}^2) = \frac{1}{2} \times \left(9 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4} \right) = \frac{27}{4} \times \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right)$.

$\therefore 9\pi - \frac{27\sqrt{3}}{4} - \frac{27}{4} \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right) = 9\pi - \frac{27\sqrt{3}}{2} - \frac{27}{8}$ 按照弧田面积经验公式计算结果比实际少 $9\pi - \frac{27\sqrt{3}}{2} - \frac{27}{8}$ 平方米.

故答案为 $\frac{1}{2}r$; $\frac{27\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{8} - 9\pi$.

16 (2020 如皋模拟) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & e^{-2} \leq x < e, \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 2x$, 设 a 为实数, 若存

在实数 m , 使

$f(m) - 2g(a) = 0$, 则实数 a 的取值范围为_____.

答案 $[-1, 3]$

解析 因为函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0, \\ \ln x, & e^{-2} \leq x < e \end{cases}$ 的值域为 $[-2, 6]$, 所以 $-2 \leq 2(a^2 - 2a) \leq 6$, 解得

$1 \leq a \leq 3$.

四、解答题

17 (2019 北京卷) 设函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 求 a 的取值范围.

答案 (1) -1 (2) $(-\infty, 0]$

解析 (1) 若函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ 为奇函数,

则 $f(-x) = -f(x)$, 即 $e^{-x} + ae^x = -(e^x + ae^{-x})$,

即 $(a+1)(e^x + e^{-x}) = 0$ 对任意的 x 恒成立,

则 $a+1=0$, 得 $a=-1$.

(2) 若函数 $f(x) = e^x + ae^{-x}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 则 $f'(x) = e^x - ae^{-x} \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

即 $a \leq e^{2x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

又 $e^{2x} > 0$, 则 $a \leq 0$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$.

18 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{1 - ax}{x - 1}$ 的图象关于原点对称, 其中 a 为常数.

(1) 求 a 的值;

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < m$ 恒成

立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若关于 x 的方程 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x + k)$ 在 $[2, 3]$ 上

有解, 求 k 的取值范围.

答案 (1) -1 (2) $[-1, +\infty)$ (3) $[-1, 1]$

解析 (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数,

$\therefore f(-x) = -f(x)$,

即 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1+ax}{-x-1} = -\log_{\frac{1}{2}} \frac{1-ax}{x-1} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{1-ax}$ 在定义域内恒成立,

$$\text{所以 } \frac{1+ax}{-x-1} = \frac{x-1}{1-ax},$$

即 $1-a^2x^2=1-x^2$ 在定义域内恒成立,

所以 $a^2=1$, 解得 $a=-1$ 或 $a=1$ (舍), 所以 $a=-1$.

$$(2) f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1),$$

当 $x > 1$ 时, $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < -1$,

$\therefore x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$ 恒成立,

$\therefore m \geq -1$. 即 m 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

$$(3) \text{ 由(1)得: } f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k), \text{ 即 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x-1} = \log_{\frac{1}{2}}(x+k),$$

$$\text{即 } \frac{x+1}{x-1} = x+k, \text{ 即 } k = \frac{2}{x-1} - x + 1 \text{ 在 } [2, 3] \text{ 上有}$$

$$\text{解, } g(x) = \frac{2}{x-1} - x + 1 \text{ 在 } [2, 3] \text{ 上单调递减, } g(2) =$$

$$1, g(3) = -1, \text{ 则 } g(x) \text{ 的值域是 } [-1, 1], \therefore k \in [-1,$$

$$1]. \text{ 即 } k \text{ 的取值范围为 } [-1, 1].$$

19 已知函数 $f(x) = 2^x, x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 m 取何值时方程 $|f(x) - 2| = m$ 有一个解? 两个解?

(2)若不等式 $[f(x)]^2 + f(x) - m > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,求 m 的取值范围.

答案 (1)当 $m=0$ 或 $m \geq 2$ 时,有一个解;当 $0 < m < 2$ 时,有两个解 (2) $(-\infty, 0]$

解析 (1)令 $F(x)=|f(x)-2|=|2^x-2|$, $G(x)=m$, 画出 $F(x)$ 的图象如图 4.7 5 所示:

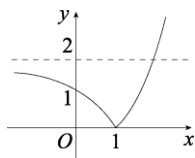


图 4.7 5

由图象看出, 当 $m=0$ 或 $m \geq 2$ 时, 函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象只有一个交点, 原方程有一个解; 当 $0 < m < 2$ 时, 函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 的图象有两个交点, 原方程有两个解.

(2)令 $2^x=t(t>0)$, $H(t)=t^2+t$, 因为 $H(t)=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以当 $t>0$ 时, $H(t)>H(0)=0$. 因此要使 $t^2+t>m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 应有 $m \leq 0$, 即所求 m 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

20 (2020·石家庄模拟)已知函数 $f(x)=-x^2+2ex+t-1$, $g(x)=x+\frac{e^2}{x}(x>0)$, 其中 e 表示自然对数的底数.

(1)若 $g(x)=m$ 有实根, 求 m 的取值范围;

(2)确定 t 的取值范围, 使得 $g(x)-f(x)=0$ 有两个相异实根.

答案 (1) $[2e, +\infty)$ (2) $(-e^2+2e+1, +\infty)$

解析 解法 1: 因为 $x>0$, 所以 $g(x)=x+\frac{e^2}{x} \geq 2\sqrt{e^2} = 2e$, 等号成立的条件是 $x=e$. 故 $g(x)$ 的值域是 $[2e, +\infty)$, 因而只需 $m \geq 2e$, $g(x)=m$ 就有实根.

解法 2: 作出 $g(x)=x+\frac{e^2}{x}(x>0)$ 的图象, 如图 4.7 6 所示, 观察图象可知 $g(x)$ 的最小值为 $2e$, 因此要使

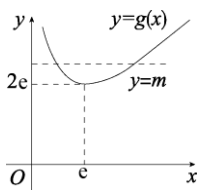


图 4.7 6

$g(x)=m$ 有实根, 则只需 $m \geq 2e$.

(2)若 $g(x) - f(x) = 0$ 有两个相异的实根, 则函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象有两个不同的交点. 因为 $f(x) = -x^2 + 2ex + t - 1 = -(x - e)^2 + t - 1 + e^2$, 所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = e$, 开口向下, 最大值为 $t - 1 + e^2$. 由题意, 作出 $g(x) = x + \frac{e^2}{x} (x > 0)$ 及 $f(x) = -x^2 + 2ex + t - 1$ 的大致图象, 如图 4.7 7 所示. 故当 $t - 1 + e^2 > 2e$, 即 $t > -e^2 + 2e + 1$ 时, $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象有两个交点, 即 $g(x) - f(x) = 0$ 有两个相异实根. 所以 t 的取值范围是 $(-e^2 + 2e + 1, +\infty)$.

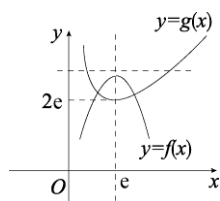


图 4.7 7