综合小练（5）

一、选择题

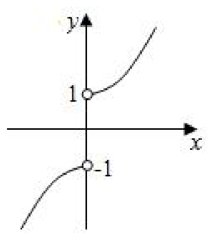
1. 函数 $f(x)=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x}}+\lg(3x+1)$ 的定义域是（　　）

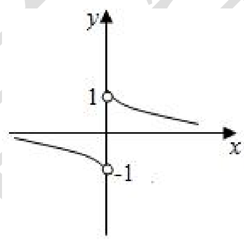
A. $\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(-\dfrac{1}{3},1\right)$　　C. $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$

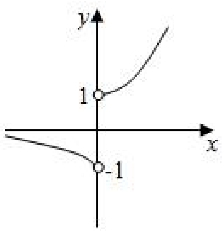
2．已知扇形弧长为3π，面积为6π，则该扇形半径为（　　）.

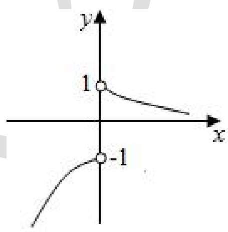
A. 2　　*B*. 4　　*C*. 6　　*D*. 8

3. 函数$y=\frac{xa^x}{|x|}(a>1)$的图象的大致形状是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

4. 已知$3^m=5^n=k$且$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2$，则 k 的值为(　　)

A. 5　　B. $\sqrt{15}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 225

二、填空题

5. 已知幂函数$y=(m^2-2m-2)x^{m^2+4m}$的图象关于原点对称且与 x 轴、y 轴均无交点，则整数 m 的值为______

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}3^x+4a,x>3\\2x+a^2,x\le 3\end{cases}$ 若 f（x）的值域为 R，则实数 a 的取值范围是______.

7. 已知定义在实数集 R 上的偶函数 f（x）在区间（-∞，0]上是减函数，则不等式 f（1）＜f（ln$x$）的解集是__________.

8. 已知函数 f（x）$=\begin{cases}2^x-a,x\ge 0\\x^2+ax+a,x<0\end{cases}$有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

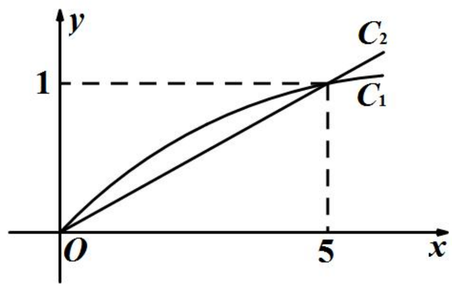
9. 计算：（1）$(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}}-4\times(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{2}\times 8^{0.25}+(-2019)^{0}$；

（2）$log_{2.5}6.25+lg\frac{1}{100}+ln(e\sqrt{e})+log_{2}(log_{2}16)$.

10．某家庭进行理财投资，有两种方式，甲为投资债券等稳健型产品，乙为投资股票等风险型产品，设投资甲、乙两种产品的年收益分别为y_1、y_2万元，根据长期收益率市场预测，它们与投入资金x万元的关系分别为$y_1=m\sqrt{x+4}+a$，$y_2=bx$，（其中m，a，b都为常数），函数y_1，y_2对应的曲线C_1,C_2如图所示.

（1）求函数y_1、y_2的解析式；

（2）若该家庭现有5万元资金，全部用于理财投资，问：如何分配资金能使一年的投资获得最大收益，其最大收益是多少万元？



11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\cdot 4^x-1}{4^x+1}$ 是定义在 R 上的奇函数.

（1）求 a 的值；

（2）判断并证明函数 $f(x)$ 的单调性，并利用结论解不等式 $f(x^2-2x)+f(3x-2)<0$;

（3）是否存在实数 k，使得函数 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的取值范围是 $\left[\dfrac{k}{4^m},\dfrac{k}{4^n}\right]$，若存在，求出实数 k 的取值范围；若不存在，请说明理由.

12. 已知 $f(e^x)=ax^2-x+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)$ 的值域；

（3）设 $a\ge\frac{1}{2}$，若 $h(x)=[f(x)-a]\cdot\log_x e$ 对任意的 $x_1,x_2\in[e^{-2},e^{-1}]$，总有

$\left|h(x_1)-h(x_2)\right|\le a+\frac{1}{2}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

综合小练（5）答案

一、选择题：　　BBCB

二、填空题

5. -1

6.【答案】（-∞，-3]∪[7，+∞）

解：函数 $f(x)=\begin{cases}3^x+4a, x>3\\ 2x+a^2, x\leqslant 3\end{cases}$，

当 x＞3 时，f（x）$=3^x+4a$，在（3，+∞）上为增函数，f（x）∈（27+4a，+∞）；
当 x≤3 时，f（x）$=2x+a^2$，在（-∞，3]上为增函数，f（x）∈（-∞，$6+a^2$]；
若 f（x）的值域为 R，则（-∞，$6+a^2$]∪（27+4a，+∞）=R，
则 $6+a^2\geqslant 27+4a$，即 $a^2-4a-21\geqslant 0$，解得 a≤-3，或 a≥7，
则实数 a 的取值范围是（-∞，-3]∪[7，+∞）.

7.【答案】（0，$\frac{1}{e}$）∪（e．+∞）

【解析】解：∵偶函数 f（x）在区间（-∞，0]上是减函数，
∴函数 f（x）在区间[0，+∞）上是增函数，　则不等式等价为 f（1）＜f（|lnx|），
即|lnx|＞1，即 lnx＞1 或 lnx＜-1，解得 x＞e 或 $0<x<\frac{1}{e}$，

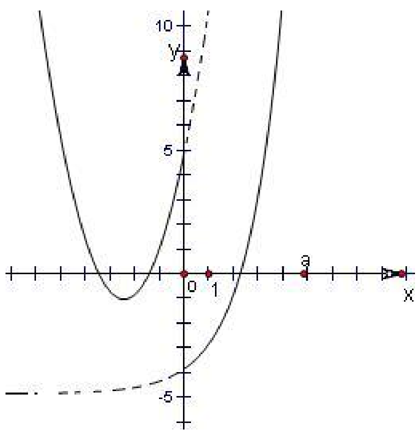
即不等式 f（1）＜f（lnx）的解集是 $(0,\frac{1}{e})\cup(e,+\infty)$；

故答案为：$(0,\frac{1}{e})\cup(e,+\infty)$

8.【答案】$a>4$

【解析】

解：由题意可得函数 f（x）的图象与 x 轴有三个不同的交点，如图所示：



等价于当 x≥0 时，方程 $2^x-a=0$ 有一个根，且 x＜0 时，方程 $x^2+ax+a=0$ 有两个根，

即 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=a^2-4a>0\end{cases}$ ⇒a＞4.

故实数 a 的取值范围是 a＞4.

三、解答题

9.解：（1）原式=$(2^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}-4\times[(\frac{7}{4})^{-2}]^{-\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{3}{4}}+1$=$2-4\times\frac{7}{4}-2+1$=-6；

（2）原式=$log_{2.5}2.5^2+lg10^{-2}+lne^{\frac{3}{2}}+log_2 4$=$2-2+\frac{3}{2}+2$=$\frac{7}{2}$.

10．(1)解：由函数 y_1 的图象过点 $(0,0),(5,1)$ 得 $\begin{cases}2m+a=0\\3m+a=1\end{cases}$，所以 $\begin{cases}m=1\\a=-2\end{cases}$；

由函数 y_2 的图象过点 $(0,0),(5,1)$ 得 $5b=1$，所以 $b=\frac{1}{5}$；

所以 $y_1=\sqrt{x+4}-2$，$y_2=\frac{1}{5}x$.

(2)设投资甲产品为 x 万元，则投资乙产品为 $(5-x)$ 万元，$0\le x\le 5$

则总收益 $y=y_1+y_2=\sqrt{x+4}-2+\frac{1}{5}(5-x)=\sqrt{x+4}-\frac{1}{5}x-1$，

设 $\sqrt{x+4}=t,(2\le t\le 3)$，则 $y=t-\frac{1}{5}(t^2-4)-1=-\frac{1}{5}t^2+t-\frac{1}{5}=-\frac{1}{5}\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{21}{20}$，

所以 $t=\frac{5}{2}$ 即 $x=\frac{9}{4}$ 时，总收益最大，为 $\frac{21}{20}$ 万.

答：（1）y_1、y_2 的解析式分别为 $y_1=\sqrt{x+4}-2$，$y_2=\frac{1}{5}x$；

（2）投资甲产品 $\frac{9}{4}$ 万元，投资乙产品 $\frac{11}{4}$ 万元，可以使得一年的投资获得最大收益为 $\frac{21}{20}$ 万.

11、解：（1）$\because f(x)=\frac{a\cdot4^x-1}{4^x+1}$ 是定义在 R 上的奇函数

$\therefore f(x)+f(-x)=0$ $f(x)=\frac{4^x-1}{4^x+1}$

从而：

$$\frac{a\cdot4^x-1}{4^x+1}+\frac{a\cdot4^{-x}-1}{4^{-x}+1}=\frac{a\cdot4^x-1}{4^x+1}+\frac{a\cdot\frac{1}{4^x}-1}{\frac{1}{4^x}+1}=\frac{a\cdot4^x-1}{4^x+1}+\frac{a-4^x}{1+4^x}=\frac{(a-1)4^x+a-1}{1+4^x}=0$$

$\therefore a=1$

（2）设任意x_1，$x_2 \in R$且$x_1 < x_2$

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(1-\frac{2}{4^{x_1}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{4^{x_2}+1}\right)=\frac{2}{4^{x_2}+1}-\frac{2}{4^{x_1}+1}=\frac{2\left(4^{x_1}-4^{x_2}\right)}{\left(4^{x_2}+1\right)\left(4^{x_1}+1\right)}\cdots\cdots 6\text{ 分}$$

$\because x_1 < x_2 \quad \therefore 4^{x_1} < 4^{x_2} \quad ,4^{x_1}+1>0,4^{x_2}+1>0 \therefore f(x_1)<f(x_2)$

$\therefore f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$上单调增函数.　　　　　$\because f(x^2-2x)+f(3x-2)<0$

又$\because$ $f(x)$是定义在R上的奇函数且是在$(-\infty,+\infty)$上单调增函数

$\therefore f(x^2-2x)<f(2-3x)$　　　　　　$\therefore x^2-2x<2-3x \quad \therefore -2<x<1$

（3）假设存在实数k，使之满足题意

由（2）可得函数$f(x)$在$[m,n]$上单调递增

$$\therefore \begin{cases} f(m)=\dfrac{k}{4^m} \\ f(n)=\dfrac{k}{4^n} \end{cases} \therefore \begin{cases} \dfrac{4^m-1}{4^m+1}=\dfrac{k}{4^m} \\ \dfrac{4^n-1}{4^n+1}=\dfrac{k}{4^n} \end{cases} \therefore m,n\text{ 为方程 }\frac{4^x-1}{4^x+1}=\frac{k}{4^x}\text{ 的两个根，}$$

即方程$\dfrac{4^x-1}{4^x+1}=\dfrac{k}{4^x}$有两个不等的实根，

令$4^x=t>0$，即方程$t^2-(1+k)t-k=0$有两个不等的正根

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{1+k}{2}>0 \\ \Delta>0 \\ -k>0 \end{cases} \quad \therefore -3+2\sqrt{2}<k<0$$

12.⑴设$e^x=t$，则$x=\ln t$，所以$f(t)=a(\ln t)^2-\ln t+1$

所以$f(x)=a(\ln x)^2-\ln x+1(x>0)$；

⑵设$\ln x=m(m\le 0)$，则$f(x)=g(m)=am^2-m+1$

当$a=0$时，$f(x)=g(m)=-m$，$g(m)$的值域为$[1,+\infty)$

当$a\ne 0$时，$f(x)=g(m)=am^2-m+1=a(m-\frac{1}{2a})^2-\frac{1}{4a}+1(m\le 0)$

若$a>0$，$m_{对}=\frac{1}{2a}>0$，$g(m)$的值域为$[1,+\infty)$

若$a<0$，$m_{对}=\frac{1}{2a}<0$，$g(m)$在$(-\infty,\frac{1}{2a}]$上单调递增，在$[\frac{1}{2a},0]$上单调递减，

$g(m)$的值域为$(-\infty,1-\frac{1}{4a}]$

综上，当$a\ge 0$时$f(x)$的值域为$[1,+\infty)$

当$a<0$时$f(x)$的值域为$(-\infty,1-\frac{1}{4a}]$

⑶因为$h(x)=a\ln x-1+\frac{1-a}{\ln x}$对任意$x_1,x_2\in[e^{-2},e^{-1}]$总有$|h(x_1)-h(x_2)|\le a+\frac{1}{2}$

所以$h(x)$在$[e^{-2},e^{-1}]$满足$h(x)_{\max}-h(x)_{\min}\le a+\frac{1}{2}$

设$\ln x=s(s\in[-2,-1])$，则$h(x)=r(s)=as+\frac{1-a}{s}-1$，$s\in[-2,-1]$

当$1-a\le 0$即$a\ge 1$时$r(s)$在区间$[-2,-1]$单调递增

所以$r(-1)-r(-2)\le a+\frac{1}{2}$，即$-2-(-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2})\le a+\frac{1}{2}$，所以$a\le 2$，则$1\le a\le 2$

当$\frac{1}{2}\le a<1$时,下证函数 $r(s)$ 在区间$[-2,-1]$单调递增：

任取,则$-2\le s_1<s_2\le -1$

$r(s_1)-r(s_2)=a(s_1-s_2)+(1-a)(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2})=(s_1-s_2)+(a-\frac{1-a}{s_1s_2})$

∵$1-a\in(0,\frac{1}{2})$,$1<s_1s_2<4$

，∴$\frac{1-a}{s_1s_2}\in(0,\frac{1}{2})$，∴$a-\frac{1-a}{s_1s_2}>0$，

又，$s_1-s_2<0$ ∴$r(s_1)<r(s_2)$.即函数$r(s)$在区间$[-2,-1]$单调递增.所以

$\frac{1}{2}\le a<1$时，$r(-1)-r(-2)\le a+\frac{1}{3}$ 恒成立

综上a的取值范围为$\frac{1}{2}\le a\le 2$