1.2　排　列

第 1 课时　排列与排列数公式

【学习目标】 1.了解并掌握排列的概念.2.理解并掌握排列数公式及推导过程.3.能应用排列知识解决简单的实际问题.

知识梳理　　梳理教材　夯实基础

知识点一　排列的定义

一般地，从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

思考　同一个排列中，同一个元素能重复出现吗？

答案　由排列的定义知，在同一个排列中不能重复出现同一个元素.

知识点二　排列数与排列数公式

一般地，从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m表示，$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$，其中 n，$m\in\mathbf{N}^*$，且 $m\leqslant n$.

思考　排列与排列数的区别是什么？

答案　“排列”和“排列数”是两个不同的概念，排列是指完成的具体的一件事，其过程要先取后排，它不是一个数；而排列数是指完成具体的一件事的所有方法的种数，即所有排列的个数，它是一个数.

知识点三　阶乘的概念及性质

1.阶乘的概念

$A_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.$A_n^n$称为 n 的阶乘，通常用 $n!$ 表示，即 $A_n^n=n!$.

2.阶乘的相关应用

(1)规定：$0!=1$.

(2)排列公式的阶乘式：$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

思考辨析　判断正误

1.a，b，c 与 b，a，c 是同一个排列.(　×　)

2.同一个排列中，同一个元素不能重复出现.(　√　)

3.在一个排列中，若交换两个元素的位置，则该排列不发生变化.(　×　)

4.从 4 个不同元素中任取 3 个元素，只要元素相同得到的就是相同的排列.(　×　)

题型探究

探究重点　素养提升

一、排列的概念

例 1　下列问题是排列问题的为________.(填序号)

①选 2 个小组分别去植树和种菜；

②选 2 个小组去种菜；

③某班 40 名同学在假期互发短信；

④从 1,2,3,4,5 中任取两个数字相除；

⑤10 个车站，站与站间的车票.

考点　排列的概念

题点　排列的判断

答案　①③④⑤

解析　①植树和种菜是不同的，存在顺序问题，是排列问题；

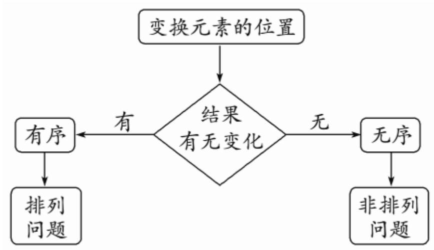
②不存在顺序问题，不是排列问题；

③存在顺序问题，是排列问题；

④两个数相除与这两个数的顺序有关，是排列问题；

⑤车票使用时有起点和终点之分，故车票的使用是有顺序的，是排列问题.

反思感悟　判断一个具体问题是否为排列问题的思路



跟踪训练 1　判断下列问题是否为排列问题.

(1)会场有 50 个座位，要求选出 3 个座位有多少种方法？若选出 3 个座位安排三位客人，又有多少种方法？

(2)从集合 $M=\{1,2,\cdots,9\}$中，任取两个元素作为 a，b，可以得到多少个焦点在 x 轴上的椭圆方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$？可以得到多少个焦点在 x 轴上的双曲线方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$?

(3)平面上有 5 个点，其中任意三个点不共线，这 5 个点最多可确定多少条直线？可确定多少条射线？

考点　排列的概念

题点　排列的判断

解　(1)第一问不是排列问题，第二问是排列问题.“入座”问题同“排队”问题，与顺序有关，

故选 3 个座位安排三位客人是排列问题.

(2)第一问不是排列问题，第二问是排列问题.若方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则必有 $a>b$，a，b 的大小关系一定；在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，不管 $a>b$ 还是 $a<b$，方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 均表示焦点在 x 轴上的双曲线，且是不同的双曲线，故是排列问题.

(3)确定直线不是排列问题，确定射线是排列问题.

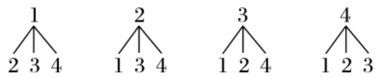
二、“树形图”解决排列问题

例 2　从 1,2,3,4 四个数字中任取两个数字组成两位不同的数，一共可以组成多少个？

考点　排列的概念

题点　列举所有排列

解　由题意作“树形图”，如下.



故组成的所有两位数为 12,13,14,21,23,24,31,32,34,41,42,43，共有 12 个.

反思感悟　利用“树形图”法解决简单排列问题的适用范围及策略

(1)适用范围：“树形图”在解决排列元素个数不多的问题时，是一种比较有效的表示方式.

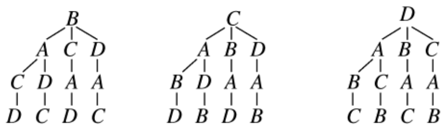
(2)策略：在操作中先将元素按一定顺序排出，然后以先安排哪个元素为分类标准进行分类，再安排第二个元素，并按此元素分类，依次进行，直到完成一个排列，这样能做到不重不漏，然后再按树形图写出排列.

跟踪训练 2　写出 A，B，C，D 四名同学站成一排照相，A 不站在两端的所有可能站法.

考点　排列的概念

题点　列举所有排列

解　由题意作“树形图”，如下，



故所有可能的站法是 $BACD$，$BADC$，$BCAD$，$BDAC$，$CABD$，$CADB$，$CBAD$，$CDAB$，$DABC$，$DACB$，$DBAC$，$DCAB$.

三、排列数的计算

例 3　(1)用排列数表示$(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=$________.($n\in\mathbf{N}^*$且 $n<55$).

答案　A_{69-n}^{15}

解析　因为 $55-n$,$56-n$, …, $69-n$ 中的最大数为 $69-n$, 且共有 $69-n-(55-n)+1=15$(个)元素，

所以$(55-n)(56-n)\cdots(69-n)=A_{69-n}^{15}$.

(2)已知 $A_{2n}^{3}=2A_{n+1}^{4}$，则 $\log_{n}25$ 的值为________.

答案　2

解析　因为 $A_{2n}^{3}=2A_{n+1}^{4}$，

所以 $2n\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)=2(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$，

由题意知 $n\geqslant 3$，整理方程，

解得 $n=5$，所以 $\log_{n}25=2$.

(3)计算：$\dfrac{4A_{8}^{4}+2A_{8}^{5}}{A_{8}^{8}-A_{9}^{5}}$.

解　$\dfrac{4A_{8}^{4}+2A_{8}^{5}}{A_{8}^{8}-A_{9}^{5}}=\dfrac{4A_{8}^{4}+2\times 4A_{8}^{4}}{4\times 3\times 2A_{8}^{4}-9A_{8}^{4}}=\dfrac{12}{15}=\dfrac{4}{5}$.

反思感悟　排列数公式的形式及选择方法

排列数公式有两种形式，一种是连乘积的形式，另一种是阶乘的形式，若要计算含有数字的排列数的值，常用连乘积的形式进行计算.

跟踪训练 3　(1)已知 $A_{n}^{2}=7A_{n-4}^{2}$，则 n 的值为(　　)

A.6　B.7　C.8　D.2

答案　B

解析　由排列公式，得 $n(n-1)=7(n-4)(n-5)$，$n\in\mathbf{N}^{*}$，$n\geqslant 6$.

$\therefore 3n^{2}-31n+70=0$，解得 $n=7$ 或 $n=\dfrac{10}{3}$(舍).

(2)若 $A_{10}^{m}=10\times 9\times\cdots\times 5$，则 $m=$________.

答案　6

解析　由排列数公式，得 $m=6$.

核心素养之逻辑推理

与排列公式有关的证明问题

典例　(1)求证：$A_{n+1}^{n+1}=A_{n+1}^{n}=(n+1)A_{n}^{n}$；

(2)计算：$\dfrac{A_{n-1}^{m-1}\cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}}$.

(1)**证明**　因为 $A_{n+1}^{n+1}=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$，

$A_{n+1}^{n}=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2$，

$(n+1)A_{n}^{n}=(n+1)\cdot n!$

$=(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$，

所以 $A_{n+1}^{n+1}=A_{n+1}^{n}=(n+1)A_{n}^{n}$.

(2)**解**　$\dfrac{A_{n-1}^{m-1}\cdot A_{n-m}^{n-m}}{A_{n-1}^{n-1}}=\dfrac{(n-1)!}{[n-1-(m-1)]!}\cdot(n-m)!\cdot\dfrac{1}{(n-1)!}=1$.

[素养评析]　(1)对含有字母的排列数的式子进行变形式有关的论证时，一般用阶乘式.

(2)掌握逻辑推理的基本形式，学会有逻辑地思考问题，有助于形成有条理，合乎逻辑的思维品质的数学素养.

随堂演练

基础巩固　学以致用

1.从 1,2,3,4 四个数字中，任选两个数做加、减、乘、除运算，分别计算它们的结果，在这些问题中，有几种运算可以看作排列问题(　　)

A.1 种　B.3 种　C.2 种　D.4 种

考点　排列的概念

题点　排列的判断

答案　C

解析　因为加法和乘法满足交换律，所以选出两个数做加法和乘法时，结果与两数字位置无关，故不是排列问题，而减法、除法与两数字的位置有关，故是排列问题.

2.从甲、乙、丙三人中选两人站成一排的所有站法为(　　)

A.甲乙，乙甲，甲丙，丙甲

B.甲乙，丙乙、丙甲

C.甲乙，甲丙，乙甲，乙丙，丙甲，丙乙

D.甲乙，甲丙，乙丙

考点　排列的概念

题点　列举所有排列

答案　C

3.$(x-3)(x-4)(x-5)\cdots(x-12)(x-13)$，$x\in\mathbf{N}^*$，$x>13$ 可表示为(　　)

A.A_{x-3}^{10}　B.A_{x-3}^{11}　C.A_{x-13}^{10}　D.A_{x-13}^{11}

考点　排列数公式

题点　利用排列数公式计算

答案　B

解析　从$(x-3)$，$(x-4)$，…到$(x-13)$共$(x-3)-(x-13)+1=11$(个)数，所以根据排列数公式知$(x-3)(x-4)(x-5)\cdots(x-12)(x-13)=A_{x-3}^{11}$.

4.8 种不同的菜种，任选 4 种种在不同土质的 4 块地上，有________种不同的种法(用数字作答).

答案　1 680

解析　将 4 块不同土质的地看作 4 个不同的位置，从 8 种不同的菜种中任选 4 种种在 4 块不同土质的地上，即为从 8 个不同元素中任选 4 个元素的排列问题.所以不同的种法共有 $A_8^4=8\times7\times6\times5=1\ 680$(种).

5.解方程 $A_{2x+1}^{4}=140A_{x}^{3}$.

考点　排列数公式

题点　解含有排列数的方程或不等式

解　根据题意，原方程等价于

$$\begin{cases}2x+1\geqslant 4,\\ x\geqslant 3,\\ x\in\mathbf{N}^*,\\ (2x+1)\,2x\,(2x-1)(2x-2)=140x(x-1)(x-2),\end{cases}$$

即$\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x\in\mathbf{N}^*,\\ (2x+1)(2x-1)=35(x-2),\end{cases}$

整理得 $4x^2-35x+69=0(x\geqslant 3，x\in\mathbf{N}^*)$，

解得 $x=3\left(x=\dfrac{23}{4}\notin\mathbf{N}^*，舍去\right)$.

课堂小结

1.判断一个具体问题是否有顺序的方法：变换元素的位置，看结果有无变化，若有变化，则与元素的顺序有关，是排列问题；否则，为非排列问题.

2.应用排列数公式应注意的问题

(1)排列数的第一个公式 $A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)$适用于具体计算以及解当 m 较小时的含有排列数的方程和不等式.

(2)排列数的第二个公式 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$适用于与排列数有关的证明、解方程、解不等式等，在具体运用时，则应注意先提取公因式，再计算，同时还要注意隐含条件“$m\leqslant n$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，$m\in\mathbf{N}^*$”的运用.

课时对点练　注重双基　强化落实

一、选择题

1.$A_{12}^{m}=9\times10\times11\times12$，则 m 等于(　　)

A.3　B.4　C.5　D.6

考点　排列数公式

题点　利用排列数公式计算

答案　B

2.已知下列问题：①从甲、乙、丙三名同学中选出两名分别参加数学、物理兴趣小组；②从甲、乙、丙三名同学中选出两人参加一项活动；③从 a，b，c，d 中选出 3 个字母；④从 1,2,3,4,5 这五个数字中取出 2 个不同的数字组成一个两位数.其中是排列问题的有(　　)

A.1 个　B.2 个　C.3 个　D.4 个

考点　排列的概念

题点　排列的判断

答案　B

解析　由排列的定义知①④是排列问题.

3.与 $A_{10}^{3}\cdot A_{7}^{7}$不相等的是(　　)

A.A_{10}^{9}　B.$81A_{8}^{8}$　C.$10A_{9}^{9}$　D.A_{10}^{10}

考点　排列数公式

题点　利用排列数公式证明

答案　B

解析　$A_{10}^{3}\cdot A_{7}^{7}=10\times9\times8\times7!=A_{10}^{9}=10A_{9}^{9}=A_{10}^{10}$，$81A_{8}^{8}=9A_{9}^{9}\neq A_{10}^{10}$，故选 B.

4.甲、乙、丙三人排成一排照相，甲不站在排头的所有排列种数为(　　)

A.6　B.4　C.8　D.10

考点　排列的概念

题点　列举所有排列

答案　B

解析　列树状图如下：

丙甲乙乙甲　乙甲丙丙甲

故组成的排列为丙甲乙，丙乙甲，乙甲丙，乙丙甲，共 4 种.

5.从 2,3,5,7 四个数中任选两个分别相除，则得到的不同结果有(　　)

A.6 个　B.10 个　C.12 个　D.16 个

考点　排列的应用

题点　无限制条件的排列问题

答案　C

解析　不同结果有 $A_{4}^{2}=4\times3=12$(个).

6.下列各式中与排列数 A_{n}^{m}相等的是(　　)

A.$\dfrac{n!}{(n-m+1)!}$

B.$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m)$

C.$\dfrac{nA_{n-1}^{m}}{n-m+1}$

D.$A_{n}^{1}A_{n-1}^{m-1}$

考点　排列数公式

题点　利用排列数公式证明

答案　D

解析　$A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，

而 $A_n^1A_{n-1}^{m-1}=n\times\dfrac{(n-1)!}{(n-m)!}=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，

所以 $A_n^1A_{n-1}^{m-1}=A_n^m$.

二、填空题

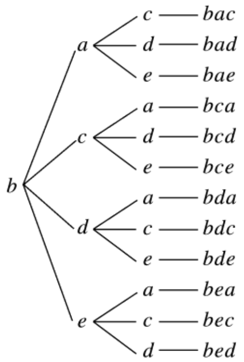
7.从 a，b，c，d，e 五个元素中每次取出三个元素，可组成________个以 b 为首的不同的排列，它们分别是____.

考点　排列的概念

题点　列举所有排列

答案　12　*bac*，*bad*，*bae*，*bca*，*bcd*，*bce*，*bda*，*bdc*，*bde*，*bea*，*bec*，*bed*

解析　画出树状图如下：



可知共 12 个，它们分别是 *bac*，*bad*，*bae*，*bca*，*bcd*，*bce*，*bda*，*bdc*，*bde*，*bea*，*bec*，*bed*.

8.已知 9！＝362 880，那么 A_9^7＝________.

答案　181 440

解析　$A_9^7=\dfrac{9!}{(9-7)!}=\dfrac{362\ 880}{2}=181\ 440$.

9.若集合 $P=\{x|x=A_4^m，m\in\mathbf{N}^*\}$，则集合 P 中共有________个元素.

考点　排列数公式

题点　利用排列数公式计算

答案　3

解析　由题意知，$m=1,2,3,4$，由 $A_4^3=A_4^4$，故集合 P 中共有 3 个元素.

10.2018 北京车展期间，某调研机构准备从 5 人中选 3 人去调查 E1 馆、E3 馆、E4 馆的参观人数，则不同的安排方法种数为________.

考点　排列的应用

题点　无限制条件的排列问题

答案　60

解析　由题意可知，问题为从 5 个元素中选 3 个元素的排列问题，所以安排方法有 $5\times4\times3=60$(种).

三、解答题

11.用排列数表示下列问题.

(1)由 0,1,2,3 组成的能被 5 整除且没有重复数字的四位数的个数；

(2)有 4 名大学生可以到 5 家单位实习，若每家单位至多招 1 名新员工，每名大学生至多到 1 家单位实习，且这 4 名大学生全部被分配完毕，其分配方案的个数.

解　(1)因为组成的没有重复数字的四位数能被 5 整除，所以这个四位数的个位数字一定是“0”，故确定此四位数，只需确定千位数字、百位数字、十位数字即可，其排列数为 A_3^3.

(2)可以理解为从 5 家单位中选出 4 家单位，分别把 4 名大学生安排到 4 家单位，其排列数为 A_5^4.

12.计算下列各题：

(1)A_{10}^3；(2)$\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}$.

解　(1)$A_{10}^3=10\times9\times8=720$.

(2)$\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_{10}^6-A_{10}^5}=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5+9\times8\times7\times6}{10\times9\times8\times7\times6\times5-10\times9\times8\times7\times6}$

$=\dfrac{9\times8\times7\times6\times(5+1)}{10\times9\times8\times7\times6\times(5-1)}=\dfrac{6}{10\times4}=\dfrac{3}{20}$.

13.沪宁铁路线上有六个大站：上海、苏州、无锡、常州、镇江、南京，铁路部门应为沪宁铁路线上的这六个大站间准备多少种不同的车票？

解　对于两大站 A 和 B，从 A 到 B 的火车票与从 B 到 A 的火车票不同，因为每张车票对应一个起点站和一个终点站，因此每张火车票对应从 6 个不同元素(大站)中任取 2 个元素(起点站和终点站)的一种排列，所以问题归结为求从 6 个不同元素中任取 2 个元素的排列数，故有 $A_6^2=6\times5=30$(种).即应准备 30 种不同的车票.

探究与拓展

14.满足不等式$\dfrac{A_n^7}{A_n^5}>12$的 n 的最小值为________.

考点　排列数公式

题点　解含有排列数的方程或不等式

答案　10

解析 $\frac{A_n^7}{A_n^5}=\frac{\frac{n!}{(n-7)!}}{\frac{n!}{(n-5)!}}=\frac{(n-5)!}{(n-7)!}>12$，得$(n-5)(n-6)>12$，

解得 $n>9$ 或 $n<2$(舍去).∴最小正整数 n 的值为 10.

15.一条铁路有 n 个车站，为适应客运需要，新增了 m 个车站，且知 $m>1$，客运车票增加了 62 种，问原有多少个车站？现在有多少个车站？

解 由题意可知，原有车票的种数是 A_n^2种，现有车票的种数是 A_{n+m}^2种，

∴$A_{n+m}^2-A_n^2=62$，

即$(n+m)(n+m-1)-n(n-1)=62$.

∴$m(2n+m-1)=62=2\times31$，

∵$m<2n+m-1$，且 $n\geqslant2$，m，$n\in\mathbf{N}^*$，

∴$\begin{cases}m=2,\\2n+m-1=31,\end{cases}$

解得 $m=2$，$n=15$，

故原有 15 个车站，现有 17 个车站.