斐波那契数列的推广与性质

胡　涛

（安徽省教育科学研究院　230061）

文[1]介绍了斐波那契数列及其推广形式的应用，受其启发，本文从斐波那契数列的定义出发，将其推广得到一类新的数列—F数列，并研究它的性质.

定义　若数列$\{a_n\}$满足：对任意的$n\in\mathbf{N}^*$（$n\geqslant3$），总存在$i,j\in\mathbf{N}^*$，使$a_n=a_i+a_j$（$i\neq j,i<n,j<n$），则称$\{a_n\}$是F数列.

由数F列定义知斐波那契数列是其特殊情况，虽然它的通项公式不能确定，但a_n可由a_1,a_2线性表出，即有

定理1　前两项为$a_1=a,a_2=b$的F数列$\{a_n\}$，则

$$a_n=p_na+q_nb,p_n,q_n\in\mathbf{N}^*\quad(n\geqslant3).$$

证明　①$n=3$时，命题成立；

②假设$n\leqslant k$时命题成立，

即$a_k=sa+tb,s,t\in\mathbf{N}^*$；

当$n=k+1$时，$a_{k+1}=a_i+a_j\quad(i\neq j,i,j\leqslant k)$，

由归纳假设

$a_i=p_ia+q_ib,a_j=p_ja+q_jb(p_i,p_j,q_i,q_j\in\mathbf{N}^*)$，

故$a_{k+1}=(p_i+p_j)a+(q_i+q_j)b$，

即当$n\geqslant3$时有$a_n=p_na+q_nb,p_n,q_n\in\mathbf{N}^*$.

推论　前两项都为0的F数列$\{a_n\}$是零数列.

定理2　首项为a_1，公差为d的等差数列$\{a_n\}$是F数列的充要条件是$d=a_1$.

证明　（必要性）因为数列$\{a_n\}$是首项为a_1，公差为d的等差数列，且是F数列，所以有$a_3=a_1+a_2$，　即$a_1+2d=a_1+a_1+d,d=a_1$.

（充分性）若$d=a_1$，则$a_n=nd$，由于当$n\geqslant3$时，$a_n=a_1+a_{n-1}$，$1\neq n-1$，所以数列$\{a_n\}$是F数列.

定理3　首项为a_1，公比为q的等比数列$\{a_n\}$是F数列的充要条件是$q=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$或$q=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$.

证明　（必要性）因为数列$\{a_n\}$是首项为a_1，公比为q的等比数列，且是F数列，所以有$a_3=a_1+a_2$，$q^2-q-1=0$，故$q=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$或$q=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$.

（充分性）若$q=\dfrac{\sqrt5+1}{2}$或$q=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$，则$q^2-q-1=0$，$q^2=q+1$，所以$a_1q^{n-1}=a_1q^{n-2}+a_1q^{n-3}$，即$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$（$n\geqslant3$），所以数列$\{a_n\}$是$F$数列.

由F数列的定义知，数列$\{a_n\}$的前两项$a_1=a,a_2=b$，那么它的第3项为a_1+a_2，一般地，当它的前$n-1$项确定后，由于第n项是前$n-1$项中的某两项之和，这样就有C_{n-1}^2种组合，a_n的取值至多有C_{n-1}^2个，所以a_n有最大值和最小值，我们将a_n的最大值记为B_n，最小值记为C_n，其构成的数列记为$\{B_n\}$，$\{C_n\}$，其中$B_1=C_1=a$，$B_2=C_2=b$，$B_3=C_3=a+b$.

定理4　在前两项$a_1=a,a_2=b(a,b>0)$的F数列中，

（Ⅰ）若$a\leqslant b$，则$B_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant3\end{cases}$，

$$C_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ a+b, & n\geqslant3\end{cases}；$$

(Ⅱ)若 $a>b$,则 $B_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2 \\ a+b, & n=3, \\ 2a+b, & n=4 \\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant 5 \end{cases}$

$$C_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2. \\ a+b, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

证明 设$\{a_n\}$是前两项为$a_1=a,a_2=b$的F数列,则$B_1=a_1,B_2=a_2,B_3=a_1+a_2$.

(Ⅰ)若$a\leqslant b$,

当$n=3$时,有$B_3=B_1+B_2$,且$B_1\leqslant B_2<B_3$.

假设当$n=k(n\geqslant 3)$时,有$B_k=B_{k-1}+B_{k-2}$,此时有

$$B_1\leqslant B_2<B_3<\cdots<B_{k-1}<B_k.$$

当$n=k+1$时,由于$a_{k+1}=a_i+a_j\leqslant B_i+B_j\leqslant B_{k-1}+B_k$,故当$a_{k+1}=B_k+B_{k-1}$时,$a_{k+1}$最大,即$B_{k+1}=B_{k-1}+B_k$,所以对任意的$n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant 3)$有$B_n=B_{n-1}+B_{n-2}$.故

$$B_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2. \\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

由于$b\geqslant a>0$,由定理1容易证明

$$C_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2. \\ a+b, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

(Ⅱ)若$a>b$,有

$$B_3=B_1+B_2,\text{且 }B_2<B_1<B_3.$$

当$n=4$时,由于$a_4=a_i+a_j(i\neq j,i,j<4)$,
$a_2\leqslant a_1<a_3$,
则$a_4=a_i+a_j\leqslant a_3+a_2(i\neq j,i,j<3)$,
当且仅当$a_4=a_3+a_1$时,a_4最大,
即$B_4=a_3+a_1=b+2a$,且$B_2<B_1<B_3<B_4$.
由于$a_5=a_i+a_j\leqslant B_i+B_j\leqslant B_3+B_4$,
所以$B_5=B_4+B_3$,且$B_2<B_1<B_3<B_4<B_5$.

假设当$n=k(n\geqslant 5)$时,$B_k=B_{k-1}+B_{k-2}$,此时有

$$B_2<B_1<B_3<B_4\cdots<B_k.$$

当$n=k+1$时,由于$a_{k+1}=a_i+a_j\leqslant B_i+B_j\leqslant B_{k-1}+B_k$,故当$a_{k+1}=B_k+B_{k-1}$时,$a_{k+1}$最大,即$B_{k+1}=B_{k-1}+B_k$,所以对任意的$n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant 5)$有$B_n=B_{n-1}+B_{n-2}$,故

$$B_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2 \\ a+b, & n=3; \\ 2a+b, & n=4 \\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant 5 \end{cases}$$

同(Ⅰ)可证

$$C_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2. \\ a+b, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

事实上,上面(Ⅰ)中的数列$\{B_n\}$是广义的斐波那契数列,$B_n=af_{n-2}+bf_{n-1}(n\geqslant 3)$,其中$f_n$是前两项$f_1=f_2=1$的斐波那契数列的通项公式.

类似的,若$a_1<0,a_2<0$,有

定理5 在前两项$a_1=a,a_2=b(a,b<0)$的F数列中,

(Ⅰ)若$a\geqslant b$,则

$$C_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2 \\ C_{n-1}+C_{n-2}, & n\geqslant 3 \end{cases},B_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2 \\ a+b, & n\geqslant 3 \end{cases};$$

(Ⅱ)若$a<b$,则

$$C_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2 \\ a+b, & n=3 \\ 2a+b, & n=4 \\ C_{n-1}+C_{n-2}, & n\geqslant 5 \end{cases},B_n=\begin{cases} a, & n=1 \\ b, & n=2. \\ a+b, & n\geqslant 3 \end{cases}$$

定理6 在前两项$a_1=a,a_2=b(a>0,b<0)$的F数列中,

(Ⅰ)当$a\geqslant|b|$时,记$\frac{a}{|b|}$的整数部分为k,则

$$B_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ b+(n-2)a, & 3\leqslant n\leqslant 5\\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant 6\end{cases},$$

$$C_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ a+(n-2)b, & 3\leqslant n\leqslant k+5\\ C_{n-1}+C_{n-2}, & n\geqslant k+6\end{cases};$$

(Ⅱ)当$a<|b|$时,记$\frac{|b|}{a}$的整数部分为k,则

$$B_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ b+(n-2)a, & 3\leqslant n\leqslant k+5\\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant k+6\end{cases},$$

$$C_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ a+(n-2)b, & 3\leqslant n\leqslant 5\\ C_{n-1}+C_{n-2}, & n\geqslant 6\end{cases}.$$

证明 设$\{a_n\}$是前两项为$a_1=a,a_2=b$的F数列,则易知$B_2<B_3<B_1$.

(Ⅰ)当$a\geqslant|b|$时,由于$a_4=a_i+a_j\leqslant B_i+B_j\leqslant B_1+B_3$,$(i\neq j,i,j<4)$,所以$B_4=B_3+B_1=b+2a$,且$B_2<B_3<B_1<B_4$.

同理$B_5=B_4+B_1=b+3a$,$B_6=B_5+B_4$,且$B_2\leqslant B_3<B_1<B_4<B_5<B_6$.

假设当$n=k(n\geqslant 6)$时,$B_k=B_{k-1}+B_{k-2}$,此时有

$$B_2\leqslant B_3<B_1<B_4<B_5<\cdots<B_k.$$

则当$n=k+1$时,由于$a_{k+1}=a_i+a_j\leqslant B_i+B_j\leqslant B_k+B_{k-1}$,所以$B_{k+1}=B_k+B_{k-1}$.

即对任意的$n\in\mathbf{N}^*(n\geqslant 6)$,都有$B_n=B_{n-1}+B_{n-2}$,故

$$B_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ b+(n-2)a, & 3\leqslant n\leqslant 5\\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant 6\end{cases}.$$

依题设有

$$k|b|\leqslant a<(k+1)|b|,(k\in\mathbf{N}^*),$$

由于$C_2<C_3<C_1$,$a_4=a_i+a_j\geqslant C_i+C_j\geqslant C_2+C_3$,$(i\neq j,i,j<4)$,

所以$C_4=C_2+C_3=a+2b$,且$C_2<C_4<C_3<C_1$;

同理$C_5=C_4+C_2=a+3b,\cdots$

$$C_{k+2}=C_{k+1}+C_2=a+kb,$$
$$C_{k+3}=C_{k+2}+C_2=a+(k+1)b,$$
$$C_{k+4}=C_{k+3}+C_2=a+(k+2)b,$$
$$C_{k+5}=C_{k+4}+C_2=a+(k+3)b,$$

且$C_{k+5}<C_{k+4}<C_2\leqslant C_{k+3}<0\leqslant C_{k+2}<\cdots<C_4<C_3<C_1$.

用数学归纳法可证明,当$n\geqslant k+6$时,$C_n=C_{n-1}+C_{n-2}$,故

$$C_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ a+(n-2)b, & 3\leqslant n\leqslant k+5\\ C_{n-1}+C_{n-2}, & n\geqslant k+6\end{cases}.$$

(Ⅱ)当$a<|b|$时,依题设有 $ka\leqslant|b|<(k+1)a,k\in\mathbf{N}^*$,仿照定理6(Ⅰ)的证明可得

$$B_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ b+(n-2)a, & 3\leqslant n\leqslant k+5\\ B_{n-1}+B_{n-2}, & n\geqslant k+6\end{cases},$$

$$C_n=\begin{cases}a, & n=1\\ b, & n=2\\ a+(n-2)b, & 3\leqslant n\leqslant 5\\ C_{n-1}+C_{n-2}, & n\geqslant 6\end{cases}.$$

在上面的定理中,我们看到数列$\{B_n\}$、$\{C_n\}$都是从某项开始单调递增或递减.易知前两项为$a_1=a,a_2=b$的F数列$\{a_n\}$单调递增的必要条件是$0<a_1<a_2$.当$a_1=2,a_2=5$时,若数列$\{a_n\}$单调递增,则有

$$C_n=\begin{cases}2, & n=1\\ 5, & n=2\\ 2n+1, & n=3,4\\ n+6, & n\geqslant 5\end{cases},$$

出乎意料的是从第 5 项开始，C_n 为连续的自然数. 一般地，有

定理 7 在前两项 $a_1=a,a_2=b(a,b\in\mathbf{N}^*)$ 的单调递增的 F 数列 $\{a_n\}$ 中. 若 $(a,b)=1$，则存在 $N\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant N$ 时，C_n 为连续的自然数.

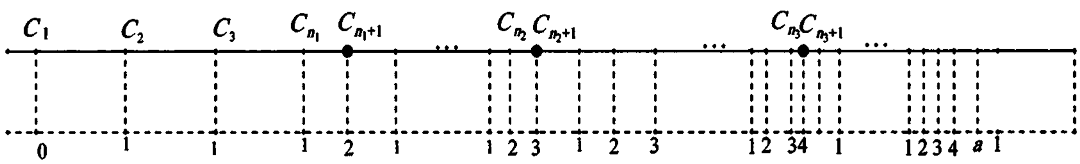
证明 注意到 $(a,b)=1$，记 $b=am+r$ $(1\leqslant r\leqslant a-1)$，则

$$a+ib\equiv ir(\bmod a),\quad i=1,2,\cdots,a-1,a.$$

可证 $a+ir(\bmod a)=0,1,\cdots,a-1$[2] 是模 a 的完全剩余系. 若这 a 个自然数又在长度为 a 的区间内，则必然是连续的 a 个自然数.

为便于理解，不失一般性，不妨设 $b=ma+1$，$m\in\mathbf{N}^*$，由于

$C_1=a,C_2=b,C_3=a+b,\{a_n\}$ 单调递增，$a_4>a_3$，则 $C_4=\min\{a_3+a_2,a_3+a_1\}=C_3+C_1$.



当 $C_n\leqslant a+b$ 时，因为 $C_n\equiv 0,1(\bmod a)$，且 $C_3+C_2\leqslant C_i+C_j\equiv 2(\bmod a)$，$i\neq j,i<n,j<n$，所以，当 $C_3<C_n<C_3+C_2=a+2b$ 时，$C_n\equiv 1(\bmod a)$，且 $C_n=C_{n-1}+C_1=C_{n-1}+a$.

若 $C_{n_1}<a+2b<C_{n_1}+C_1$，则 $C_{n_1+1}=a+2b$. 此时 C_n 第一次取 $ka+2$ 形的自然数，且 C_{n_1}，C_{n_1+1} 是连续的 2 个自然数；

当 $C_n\leqslant a+2b$ 时，$C_n\equiv 0,1,2(\bmod a)$，且 $C_{n_1+1}+C_2\leqslant C_i+C_j\equiv 3(\bmod a)$，因此，

当 $a+2b<C_n<a+3b$ 时，$C_n\equiv 1,2(\bmod a)$，且 C_n 依关系式 $C_n=C_{n-2}+a$ 单调递增至 C_{n_2}；

若 $C_{n_3}<a+3b<C_{n_2}+C_1$，$C_{n_2}\equiv 2(\bmod a)$，于是有 $C_{n_2+1}=a+3b$，此时 C_n 第一次取 $ka+3$ 形的自然数，且 $C_{n_2-1},C_{n_2},C_{n_2+1}$ 是连续的 3 个自然数.

……

当 $C_n\leqslant a+(a-1)b$ 时，$C_n\equiv 0,1,\cdots,a-1(\bmod a)$，且 $C_{n_{a-1}+1}+C_2\leqslant C_i+C_j\equiv a(\bmod a)\equiv 0(\bmod a)$，因此，当 $a+(a-1)b<C_n<a+ab$ 时，$C_n\equiv 1,2,\cdots,a-1(\bmod a)$，且 C_n 依关系式 $C_n=C_{n-a+1}+a$ 单调递增至 $C_{n_{a-1}}$. 若 $C_{n_{a-1}}<a+ab<C_{n_{a-1}}+C_1$，$C_{n_{a-1}}\equiv a-1(\bmod a)$，于是，有 $C_{n_{a-1}+1}=a+ab$，此时 C_n 第一次取 $ka(k>1)$ 形的自然数. 令 $N_0=n_{a-1}+1$，可知 $C_{N_0},C_{N_0-1},\cdots,C_{N_0-a+1}$ 是连续的 a 个自然数，取 $N=N_0-a+1$，则当 $n\geqslant N$ 时，$C_n=C_N+n-N$，故 C_n 为连续的自然数，且 $C_N=C_{N_0}-a+1=ab+1$.

推论 前两项 $a_1=a,a_2=b(a,b\in\mathbf{N}^*,a<b)$ 的 F 数列 $\{a_n\}$ 单调递增. 若 $(a,b)=d$，则存在 $N\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant N$ 时，$\{C_n\}$ 为公差是 d 的等差数列.

定理 7 中最小的 N 值可以这样确定：先计算 $[a,a+ab)$ 中 $\{C_n\}$ 的项数，这些项是由 a,b 和首项为 $a+ib$，公差为 a 的等差数列 $\{p_{n_i}\}(i=1,2,\cdots,a-1)$ 的项构成的.

因为 $p_{n_i}=a+ib+(n_i-1)$，

由 $p_{n_i}<a+ab<p_{n_{i+1}}$，得 $b-\dfrac{ib}{a}<n_i<b+1-\dfrac{ib}{a}$，

即 $b-1-\left[\dfrac{ib}{a}\right]<n_i<b+1-\left[\dfrac{ib}{a}\right]$，

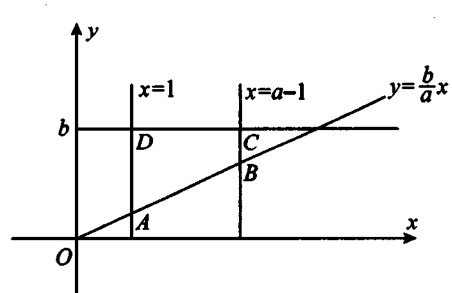
故 $n_i=b-\left[\dfrac{ib}{a}\right]$.

如图，由几何意义[2]可知

$$\sum_{i=1}^{a-1}n_i=\sum_{i=1}^{a-1}\left(b-\left[\frac{ib}{a}\right]\right)=\frac{1}{2}(a-1)(b+1).$$

因此，$N=2+\sum\limits_{i=1}^{a-1}n_i-(a-2)$

$$=\frac{1}{2}(a-1)(b-1)+3.$$



下面我们解决如下问题：

已知$\{a_n\}$是 F 数列，且单调递增，$a_1=3$，$a_2=5$. 若 $a_n=2018$，求的 n 最大值.

解 当 $a_n=C_n=2018$ 时，n 最大. 由于

$C_3=8$，$C_4=11$，$C_5=13$，$C_6=14$，$C_7=16$，

$C_8=17$，$C_9=18$.

当 $n\geqslant 7$ 时，$C_n=16+(n-7)$，

由 $C_n=2018$ 得，$n=2009$.

下面证明 n 的最大值为 2009：

因为 $a_n\geqslant C_n\ n\in\mathbf{N}^*$，$C_{2009}=2018$，

则 $a_{2009}\geqslant C_{2009}$.

若 $a_n=2018$，则 $a_{2009}\geqslant a_n$，$n\leqslant 2009$.

故 n 的最大值为 2009.

一般地，有

定理 8 已知$\{a_n\}$是 F 数列，且单调递增，$a_1=a$，$a_2=b(a,b\in\mathbf{N}^*,b>a)$. 若 $a_n=k(k\in\mathbf{N}^*,k>ab)$，则当 $a_n=C_n=k$ 时，n 最大.

类似地，还有

定理 9 已知$\{a_n\}$是 F 数列，$a_1=a$，$a_2=b(a,b\in\mathbf{N}^*,b>a)$. 若 $a_n=k=B_N$. 则当 $n=N$ 时，n 最小.

参考文献

[1]张慧欣. 也谈斐波那契数列[J]. 数学通报，2006，45(10)

[2]闵嗣鹤，严士健. 初等数论[M]. 北京：高等教育出版社，1987，45，83－84

（上接第 57 页）

k 时，M 就一直在那里不动了. 我们称 0 与 k 为两个吸收壁. 设在时刻 n 时质点 M 在点 $i(0<i<k)$ 处，在时刻 $n+1$ 时质点 M 到点 $i-1$ 的概率为 $a(0<a<1)$，仍在点 i 的概率为 $b(0<b<1)$，到点 $i+1$ 的概率为 $c(c=1-a-b)$. 那么由全概率公式可以推导出质点 M 被 k 吸收的概率为 $p_i=ap_{i-1}+bp_i+cp_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$. 这就是著名的有两个"吸收壁"的随机游动问题，一个具体而典型的例子是"赌徒输光问题".

显然上述递推公式中的 p_i 只与质点 M 的当前位置有关，而与过去的位置无关. 如果一个随机过程，一旦知道现在的状态，就可以知道未来状态的概率，并且未来状态的概率只受现在状态的影响，不受过去状态的影响——"知道现在，未来与过去无关"，那么这个随机过程就是"马尔科夫过程". 如液体中微粒所作的布朗运动、传染病受感染的人数、股票市场行为的描述、群体的增长等，都可视为马尔可夫过程(或马尔可夫链). 在现实世界中，有很多随机过程都可归为马尔可夫过程，因此对马尔科夫过程的研究，无论从理论或是实际应用来说都是具有重要意义的.

另外，顺带指出，如果不以随机的眼光看数轴上跳动的质点，那么也可设计漂亮的代数推理试题.

2011 年高考北京卷理科压轴题：

若数列 A_n：$a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$满足$|a_{k+1}-a_k|=1(k=1,2,\cdots,n-1)$，则称 A_n 为 E 数列. 记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

(Ⅰ)写出一个满足 $a_1=a_5=0$，且 $S(A_5)>0$ 的 E 数列 A_5；

(Ⅱ)若 $a_1=12$，$n=2000$，证明：E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n=2011$；

(Ⅲ)对任意给定的整数 $n(n\geqslant 2)$，是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n，使得 $S(A_n)=0$? 如果存在，写出一个满足条件的 E 数列 A_n；如果不存在，请说明理由.

解答与分析详见文献 3，此不赘述.

参考文献

[1] 复旦大学. 概率论[M]. 北京：人民教育出版社，1983，2：63

[2] 孙荣恒. 趣味随机问题[M]. 北京：科学出版社，2005，3：229

[3] 王芝平. 构建模型探新路，一个方法贯始终[J]. 数学通报，2011(7)