

## 函数的图像与性质

### 课前热身

1. 已知二次函数  $f(x)$  满足  $f(2+x) = f(2-x)$ , 且  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上是增函数, 若  $f(a) \geq f(0)$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- [0, 4]
2. 已知函数  $y = \log_2(ax-1)$  在  $(1, 2)$  上单调递增, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- $[1, +\infty)$ .
3. 已知函数  $f(x) = \log_2 x - 2\log_2(x+c)$ , 其中  $c > 0$ . 若对于任意的  $x \in (0, +\infty)$ , 都有  $f(x) \leq 1$ , 则  $c$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
- $\left[\frac{1}{8}, +\infty\right)$
4. 已知函数  $f(x) = \log_a \frac{1-x}{b+x}$  ( $0 < a < 1$ ) 为奇函数, 当  $x \in (-1, a)$  时, 函数  $f(x)$  的值域是  $(-\infty, 1)$ , 则实数  $a+b$  的值为\_\_\_\_\_.
- $a+b = -1 + \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2}$
5. 若函数  $f(x) = \frac{2^{x+1} + m}{2^x - 1}$  是奇函数, 则  $m =$ \_\_\_\_\_.
- 2

### 例题精讲

例 1. 知  $f(x) = x^2 + ax + 3$

- (1) 若当  $x \in \mathbb{R}$  时, 不等式  $f(x) \geq a$  恒成立, 求  $a$  的取值范围;
- (2) 若当  $x \in [1, 2]$  时, 不等式  $f(x) \geq a$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

例 2. 求函数  $f(x) = x^2 - 2ax - 1$  在区间  $[0, 2]$  上的最小值和最大值.

变式: 函数  $f(x) = x^2 - 4x + 4$  在闭区间  $[t, t+1]$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) 上的最小值记为  $g(t)$ .

(1) 试写出  $g(t)$  的函数关系式;

(2) 作出  $g(t)$  的大致图象, 并写出  $g(t)$  的最小值.

例 3. (1) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2}, & x \leq -1 \\ \ln(x+2), & x > -1 \end{cases}$ , 如果存在实数  $m, n$ , 其中  $m < n$ , 使得

$f(m) = f(n)$ , 则  $n - m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

(2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0. \\ 2^{|x|}, & x \leq 0. \end{cases}$  若函数  $y = |2f(x) - a| - 1$  存在 5 个零点, 则实数  $a$  的取

值范围为\_\_\_\_\_.

## 巩固练习

1. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且在  $(-\infty, 0]$  上为单调增函数. 若  $f(-1) = -2$ , 则满足  $f(2x-3) \leq 2$  的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

$(-\infty, 2]$

2. 已知函数  $f(x) = x^2 + 2x + b$  ( $b \in \mathbf{R}$ ) 的值域为  $[4, +\infty)$ , 若关于  $x$  的不等式  $f(x) < 8$  的解集为

$\{x | m < x < m+4\}$  则实数  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

3.  $\log_a \frac{12}{a-1} < 1$ , 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_. ( $4, +\infty$ )

4.

已知函数  $f(x)$  和  $g(x)$  的图象关于原点对称, 且  $f(x) = x^2 + 2x$ .

(1) 求函数  $g(x)$  的解析式; (2) 解不等式  $g(x) \geq f(x) - |x-1|$ ;

(3) 若  $h(x) = g(x) - \lambda f(x) + 1$  在  $[-1, 1]$  上是增函数, 求实数  $\lambda$  的取值范围

5. 数  $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x > 2 \\ x + a^2, & x \leq 2 \end{cases}$ , 若  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

$(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

6 已知函数  $f(x) = x^2 - 2ax - 1 + a$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(I) 若  $a = 2$ , 试求函数  $y = \frac{f(x)}{x}$  ( $x > 0$ ) 的最小值;

(II) 对于任意的  $x \in [0, 2]$ , 不等式  $f(x) \leq a$  成立, 试求  $a$  的取值范围.