2020 届高三数学周末限时练习附加题 **6**　　**2019/10/19**

21. (**选修 4-2：矩阵与变换**)已知 a，b∈**R**，若点 M(1，－2)在矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 4 \end{bmatrix}$对应的变换作用下得到点 N(2，－7)，求矩阵 ***A*** 的特征值．

22.(选修 4-4: 坐标系与参数方程)在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=1+\sin^2\alpha \end{cases}$(α 为参数)，以直角坐标系原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，试求直线 l 与曲线 C 的交点的直角坐标．

22. 为了提高学生学习数学的兴趣，某校决定在每周的同一时间开设《数学史》《生活中的数学》《数学与哲学》《数学建模》四门校本选修课程，甲、乙、丙三位同学每人均在四门校本课程中随机选一门进行学习，假设三人选择课程时互不影响，且每人选择每一课程都是等可能的.

(1) 求甲、乙、丙三人选择的课程互不相同的概率；

(2) 设 X 为甲、乙、丙三人中选修《数学史》的人数，求 X 的分布列和数学期望 E(X).

23.已知 $F_n(x)=(-1)^0C_n^0f_0(x)+(-1)^1C_n^1f_1(x)+\cdots+(-1)^nC_n^nf_n(x)(n\in\mathbf{N}^*)(x>0)$，其中 $f_i(x)(i\in\{0,1,2,\cdots,n\})$是关于 x 的函数.

(1) 若 $f_i(x)=x^i(i\in\mathbf{N})$，求 $F_2(1)$，$F_{2019}(2)$的值；

(2) 若 $f_i(x)=\dfrac{x}{x+i}(i\in\mathbf{N})$，求证：$F_n(x)=\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

高三数学周末限时练习附加题 6 答案　　2019/10/19

21. **解**：由题意，得$\begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$，即$\begin{cases} a-2=2, \\ b-8=-7, \end{cases}$

解得$\begin{cases} a=4, \\ b=1, \end{cases}$

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，(5 分)

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+15$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\lambda=5$ 或 $\lambda=3$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 5 和 3.(10 分)

22. **解**：将直线 l 的极坐标方程化为直角坐标系方程，得 $y=x$.(2 分)
将曲线 C 的参数方程化为普通方程，得 $y=2-x^2(-1\leqslant x\leqslant 1)$．(5 分)
由$\begin{cases} y=x, \\ y=2-x^2, \end{cases}$ 得 $x^2+x-2=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-2$.
又 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $x=1$，所以直线 l 与曲线 C 的交点的直角坐标为(1，1)．(10 分)
注：结果多一解的扣 2 分.

23. 解：(1) 甲、乙、丙三人从四门课程中各任选一门，共有 $4^3=64$ 种不同的选法，记“甲、乙、丙三人选择的课程互不相同”为事件 M，事件 M 共包含 $A_4^3=24$ 个基本事件，则 $P(M)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$，所以甲、乙、丙三人选择的课程互不相同的概率为$\frac{3}{8}$.(3 分)

(2) (解法 1)X 可能的取值为 0，1，2，3，(4 分)

$P(X=0)=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1\times 3^2}{3^3}=\frac{27}{64}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2\times 3}{4^3}=\frac{9}{64}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{4^3}=\frac{1}{64}$.(8 分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$.(10 分)

(解法 2)甲、乙、丙三人从四门课程中任选一门，可以看成三次独立重复试验，X 为甲、乙、丙三人中选修《数学史》的人数，则 $X\sim B\left(3，\frac{1}{4}\right)$，所以 $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$，$k=0，1，2，3$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.(10 分)

24. 解：(1) 因为 $f_i(x)=x^i(i\in\mathbf{N})$，

所以 $F_n(x)=(-1)^0C_n^0x^0+(-1)^1C_n^1x^1+\cdots+(-1)^nC_n^nx^n=(1-x)^n$，

所以 $F_2(1)=0$，(1 分)

所以 $F_{2019}(2)=(1-2)^{2019}=-1$.(3 分)

(2) 因为 $f_i(x)=\dfrac{x}{x+i}(x>0，i\in\mathbf{N})$，

所以 $F_n(x)=(-1)^0C_n^0f_0(x)+(-1)^1C_n^1f_1(x)+\cdots+(-1)^nC_n^nf_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\left[(-1)^iC_n^i\dfrac{x}{x+i}\right](n\in\mathbf{N}^*)$.

① 当 $n=1$ 时，$F_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{1}\left[(-1)^iC_1^i\dfrac{x}{x+i}\right]=1-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}$，所以 $n=1$ 时结论成立．(4 分)

② 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时结论成立，即 $F_k(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}\left[(-1)^iC_k^i\dfrac{x}{x+i}\right]=\dfrac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}$，

则 $n=k+1$ 时，$F_{k+1}(x)=\sum\limits_{i=0}^{k+1}\left[(-1)^iC_{k+1}^i\dfrac{x}{x+i}\right]$

$=1+\sum\limits_{i=1}^{k}\left[(-1)^iC_{k+1}^i\dfrac{x}{x+i}\right]+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}\dfrac{x}{x+k+1}$

$=1+\sum\limits_{i=1}^{k}\left[(-1)^i(C_k^i+C_k^{i-1})\dfrac{x}{x+i}\right]+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}\dfrac{x}{x+k+1}$

$=\sum\limits_{i=0}^{k}\left[(-1)^iC_k^i\dfrac{x}{x+i}\right]+\sum\limits_{i=1}^{k+1}\left[(-1)^iC_k^{i-1}\dfrac{x}{x+i}\right]$

$=F_k(x)-\sum\limits_{i=1}^{k+1}\left[(-1)^{i-1}C_k^{i-1}\dfrac{x}{x+i}\right]$

$=F_k(x)-\sum\limits_{i=0}^{k}\left[(-1)^iC_k^i\dfrac{x}{x+i+1}\right]$

$=F_k(x)-\sum\limits_{i=0}^{k}\left[(-1)^iC_k^i\dfrac{x+1}{x+1+i}\right]\dfrac{x}{x+1}$

$=F_k(x)-\dfrac{x}{x+1}F_k(x+1)$

$=\dfrac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}-\dfrac{k!}{(x+2)(x+3)\cdots(x+1+k)}\cdot\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1+k)k!-xk!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)(x+1+k)}$

$=\dfrac{(k+1)!}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+1+k)}$，

所以 $n=k+1$ 时，结论也成立.

综合①②可知，$F_n(x)=\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}(n\in\mathbf{N}^*)$．(10 分)