江苏省仪征中学2019届高三年级下学期3月份冲刺二模热身训练5

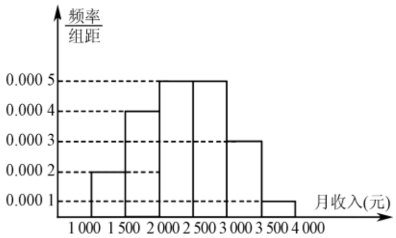
班级__________姓名__________学号__________日期__________

一、填空题：

1. 已知 $A=\{0,2,4,6\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B$ = _____ .

2. 若复数 z 满足 $\overline{z}-2=i(1+i)$(i 为虚数单位)，则 z=____________.

3. 一个社会调查机构就某地居民的月收入情况调查了 10 000 人，并根据所得数据画出样本的频率分布直方图(如图所示)．为了分析居民的收入与年龄、学历、职业等方面的关系，再从这 10 000 人中用分层抽样方法抽出 100 人作进一步调查，则在[2 500，3 500)(元/月)收入段应抽出________人.




```
S←0
I←1
While    S≤10
         S←S+I^2
         I←I+1
End    While
Print    S
```

4. 函数 $f(x)=\sqrt{x-2}\,\dfrac{1}{x-3}$ 的定义域是__________.

5.根据如图所示的伪代码可知，输出的结果 S 为________.

6. 在区间 $[-1,1]$ 上随机取一个数 x，则 $\cos\dfrac{\pi x}{2}$ 的值介于 0 到 $\dfrac{1}{2}$ 之间的概率为=______.

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线平行于直线 l：$y=2x+10$，且它的一个焦点在直线 l 上，则双曲线 C 的方程为__▲__.

8. 已知正四棱锥底面边长为 $4\sqrt{2}$，体积为 32，则此正四棱锥的侧棱长为________.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $C:x^2+y^2+8x-m+1=0$ 与直线 $x+\sqrt{2}y+1=0$ 相交于 A，B 两点．若△ABC 为等边三角形，则实数 m 的值为__▲__.

10. 已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，点 D，E 分别是边 AB，BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 DE＝3EF，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为_______.

11. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=3$，且数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也为等差数列，则 a_{11} =___▲___.

12. 已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)=2f\left(\frac{1}{x}\right)$，当 $x\in\left[1,3\right]$时，$f\left(x\right)=\ln x.$，若在区间$\left[\frac{1}{3},3\right]$上，函数 $g(x)=f(x)-ax$ 恰有一个零点，则实数 a 的取值范围是__▲__.

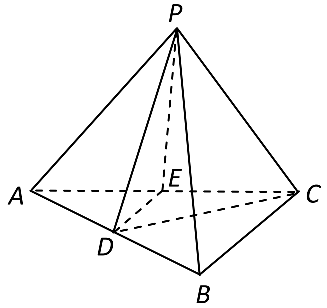
二、解答题：

13.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AC=BC$，点 D 在 AB 上，点 E 为 AC 的中点，且 BC // 平面 PDE.

（1）求证：DE // 平面 PBC;

（2）若平面 $PCD\perp$平面 ABC，

求证：平面 $PAB\perp$平面 PCD.



（第 13 题）

14. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=m\sin x+\sqrt{2}\cos x\quad(m>0)$ 的最大值为 2.

（1）求函数 $f(x)$ 在$\left[0,\ \pi\right]$上的单调递减区间;

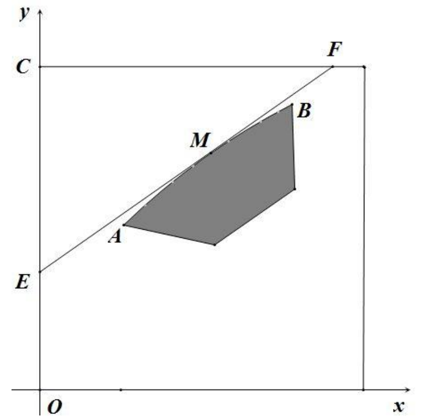
（2）$\triangle ABC$ 中，$f(A-\frac{\pi}{4})+f(B-\frac{\pi}{4})=4\sqrt{6}\sin A\sin B$，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且 C=60°，$c=3$，求$\triangle ABC$ 的面积.

17. （本小题满分 14 分）

如图，某城市有一个边长为4百米的正方形休闲广场，广场中间阴影部分是一个雕塑群. 建立坐标系（单位：百米），则雕塑群的左上方边缘曲线 AB 是抛物线 $y^2=4x(1\le x\le 3,y\ge$ 的一段. 为方便市民，拟建造一条穿越广场的直路 EF（宽度不计），要求直路 EF 与曲线 AB 相切（记切点为 M），并且将广场分割成两部分，其中直路 EF 左上部分建设为主题陈列区. 记 M 点到 OC 的距离为 m（百米），主题陈列区的面积为 S（万平方米）.

（1）当 M 为 EF 中点时，求 S 的值；

（2）求 S 的取值范围.



附加

矩阵与变换

1. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}=2a_n+3b_n,b_{n+1}=2b_n$，且满足 $\begin{bmatrix}a_{n+4}\\b_{n+4}\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}$，试求二阶矩阵 M。

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

2. 过点 $P(\frac{\sqrt{10}}{2},0)$ 作倾斜角为 α 的直线与曲线 $x^2+12y^2=1$ 交于点 M,N . ⑴若点 P 恰为弦 MN 的中点，求直线的方程； ⑵求 $|PM|\cdot|PN|$ 的最小值及相应的 α 的值.

3.（本小题满分 10 分）

从批量较大的产品中随机取出 10 件产品进行质量检测，若这批产品的不合格率为 0.05，随机变量 X 表示这 10 件产品中的不合格产品的件数.

（1）蚊：这 10 件产品中“恰好有 2 件不合格的概率 P(X＝2)”和“恰好有 3 件不合格的概率 P(X＝3)”哪个大？请说明理由；

（2）求随机变量 X 的数学期望 E(X).

1. $\{2,4\}$　2. $1-i$　3. 40　4. $[2,3)\cup(3,+\infty)$　5. 14　6. $\dfrac{1}{3}$　7. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$

8. 5　9. -11　10. $\dfrac{1}{3}$　11. 63　12. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}<a\le 6\ln 3$或$a=0$

13. 证明：（1）因为 BC // 平面 PDE，$BC\subset$平面 ABC，平面 $PDE\cap$平面 $ABC=DE$，

所以 BC // DE. ……………………………3 分

因为 $DE\not\subset$平面 PBC，$BC\subset$平面 PBC，

所以 DE // 平面 PBC. ……………………………6 分

（2）由（1）知，BC // DE.

在△ABC 中，因为点 E 为 AC 的中点，所以 D 是 AB 的中点.

因为 $AC=BC$，所以 $AB\perp CD$， ……………………………9 分

因为平面 $PCD\perp$平面 ABC，

平面 $PCD\cap$平面 $ABC=CD$，$AB\subset$平面 ABC，

则 $AB\perp$平面 PCD. ……………………………12 分

因为 $AB\subset$平面 PAB，

所以平面 $PAB\perp$平面 PCD. ……………………………14 分

14. 解：（1）由题意，$f(x)$ 的最大值为$\sqrt{m^2+2}$，所以$\sqrt{m^2+2}=2$. ……………………2 分

而 $m>0$，于是 $m=\sqrt{2}$，$f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$. ………………4 分

$f(x)$ 为递减函数，则 x 满足 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$，

即 $2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$. ……………………………6 分

所以 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$. ………………7 分

（2）设△ABC 的外接圆半径为 R，由题意，得 $2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$.

化简 $f(A-\dfrac{\pi}{4})+f(B-\dfrac{\pi}{4})=4\sqrt{6}\sin A\sin B$，得

$\sin A+\sin B=2\sqrt{6}\sin A\sin B$. ……………………………………9 分

由正弦定理，得 $2R(a+b)=2\sqrt{6}ab$， $a+b=\sqrt{2}ab$． ①

由余弦定理，得 $a^2+b^2-ab=9$，即 $(a+b)^2-3ab-9=0$． ② ………11 分

将①式代入②，得 $2(ab)^2-3ab-9=0$．

解得 $ab=3$，或 $ab=-\dfrac{3}{2}$（舍去）. …………………………13 分

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$． ………………………………14 分

15. 解：（1） M 点坐标为 $\left(m,2\sqrt{m}\right)$

曲线 AB 方程为 $y=2\sqrt{x}\left(1\le x\le 3\right)$

$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，切线方程为 $y-2\sqrt{m}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}(x-m)$

则点 E、F 坐标分别为 $E\left(0,\sqrt{m}\right)$， $F\left(4\sqrt{m}-m,4\right)$

因为 M 为 EF 中点，所以 $\sqrt{m}+4=4\sqrt{m}$，即 $\sqrt{m}=\dfrac{4}{3}$

所以点 E、F 坐标分别为 $E\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$， $F\left(\dfrac{32}{9},4\right)$

此时 $S=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{32}{9}\times(4-\dfrac{4}{3})=\dfrac{128}{27}$. . . . . 5 分

（2）由（1）知点 E、F 坐标分别为 $E\left(0,\sqrt{m}\right)$， $F\left(4\sqrt{m}-m,4\right)$

因为 $x_F-4=4\sqrt{m}-m-4=-\left(\sqrt{m}-2\right)^2<0$，所以 $x_F<4$

又 $y_E=\sqrt{m}>0$，所以直路 EF 左上部分为 ΔCEF

$S=\dfrac{1}{2}CF\cdot CE=\dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{m}-m\right)\left(4-\sqrt{m}\right)=\dfrac{1}{2}\left(m\sqrt{m}-8m+16\sqrt{m}\right),1\le m\le 3$

令 $t=\sqrt{m}$，则 $1\le t\le\sqrt{3}$，设 $S=f(t)=\dfrac{1}{2}\left(t^3-8t^2+16t\right)$

$f'(t)=\dfrac{1}{2}\left(3t^2-16t+16\right)=\dfrac{1}{2}(3t-4)(t-4)$

当 $1\le t<\dfrac{4}{3}$ 时， $f'(t)>0$；当 $\dfrac{4}{3}<t\le\sqrt{3}$ 时， $f'(t)<0$

所以$S_{\max}=f\left(t\right)_{\max}=f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{128}{27}$

因为$f(\sqrt{3})=\frac{19\sqrt{3}-24}{2}<f(1)=\frac{9}{2}$

所以S的取值范围为$(\frac{19\sqrt{3}-24}{2},\frac{128}{27}]$…………………………12 分

答：（1）当M为EF中点时，S的值为$\frac{128}{27}$；

（2）S的取值范围为$(\frac{19\sqrt{3}-24}{2},\frac{128}{27}]$…………………………14 分

1．[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

解：依题设有：$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$

令$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，则$M=A^4$

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$M=A^4=\left(A^2\right)^2=\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 96 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$……………………………………10 分

2．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

解：设直线为$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{10}}{2}+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}(t\text{为参数})$，代入曲线并整理得

$(1+\sin^2\alpha)t^2+(\sqrt{10}\cos\alpha)t+\frac{3}{2}=0$.

设M,N分别对应与t_1，t_2，则$t_1+t_2=-\frac{\sqrt{10}\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}$，$t_1\cdot t_2=\frac{\frac{3}{2}}{1+\sin^2\alpha}$. …………4 分

⑴若点P恰为弦MN的中点，则$t_1+t_2=-\frac{\sqrt{10}\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha}=0$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{2}$.

此时，直线的方程为$x=\frac{\sqrt{10}}{2}$. ……………………………………………………………7 分

⑵ $|PM|\cdot|PN|=|t_1t_2|=\dfrac{\frac{3}{2}}{1+\sin^2\alpha}$，

当$\sin^2\alpha=1$时，即$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$|PM|\cdot|PN|$的最小值为$\dfrac{3}{4}$，此时$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$．··················10 分

3 解：由于批量较大，可以认为随机变量$X\sim B(10,0.05)$，……………………….2 分

（1）恰好有 2 件不合格的概率$P(X=2)=C_{10}^{2}\times0.05^2\times0.95^8$，

恰好有 3 件不合格的概率$P(X=3)=C_{10}^{3}\times0.05^3\times0.95^7$，……………………………4 分

$\because \dfrac{P(X=2)}{P(X=3)}=\dfrac{C_{10}^{2}\times0.05^2\times0.95^8}{C_{10}^{3}\times0.05^3\times0.95^7}=\dfrac{57}{8}>1$，

$\therefore P(X=2)>P(X=3)$，即恰好有 2 件不合格的概率大；…………………………6 分

（2）$\because P(X=k)=p_k=C_{10}^{k}p^k(1-p)^{10-k}$，$k=0,1,2,\cdots,10$．

随机变量X的概率分布为：

X	0	1	2	$\cdots$	10
p_k	$C_{10}^{0}p^0(1-p)^{10}$	$C_{10}^{1}p^1(1-p)^9$	$C_{10}^{2}p^2(1-p)^8$	$\cdots$	$C_{10}^{10}p^{10}(1-p)^0$

故$E(X)=\sum\limits_{k=0}^{10}kp_k=0.5$．……………………………………………………………9 分

答：随机变量X的数学期望$E(X)$为0.5．…………………………………………10 分