基于“核心素养”的数学直观能力培养途径①

林新建

（福建省漳州第一中学 363000；闽南师范大学数学与统计学院 363000）

无论进行怎样的教学，培养学生的“数学直观”是非常重要的. 本文从一道试题解法的探析入手，就其自然性的启示阐述“数学直观”在发展数学核心素养上的意义和途径.

1 “自然”的启示

例 1（2010 年高考全国卷理科 21 题）

设函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$.

（Ⅰ）若 $a=0$，求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

解析 本题是 2010 年课标全国卷理科压轴题，试题的第（Ⅱ）问难住了众多师生，而高考标准答案同样也让他们费解——这样的解答是如何想到的呢？

这样的解答深奥难懂，解法极不自然，就是我们老师都看不懂，我们又该如何去跟学生讲应该这样解呢？

有没有较为自然简洁的解法呢？若有，怎么想到的呢？

注意到这是函数问题，我们不妨从“直观上”加以理解.

首先，“当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)\geqslant 0$”，直观意义即“$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象位于 x 轴的上方”.

由于 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$，$f(0)=0$，$f(x)$ 的图象过原点，所以直观 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 右侧附近必须递增，从而 $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x=0$ 右侧附近成立.

其次，因为 $f'(x)=e^x-1-2ax$，$f'(0)=0$，$f'(x)$ 的图象也过原点，所以直观 $f'(x)$ 的图象在 $x=0$ 右侧附近必须递增，从而 $f''(x)\geqslant 0$ 对 $x=0$ 右侧附近成立.

由于 $(f'(x))'=e^x-2a$，所以 $a\leqslant\frac{e^x}{2}$ 对 $x=0$ 右侧附近成立，从而 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

有了这个结果就好办了！接下来我们只要证明：

（1）当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 对一切 $x\geqslant 0$ 成立；

（2）当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 不是对一切 $x\geqslant 0$ 成立，这是容易的事.

一道难题，由于对“直观意义”的挖掘，我们将解答进行得如此轻松！

2 直观的意义：抽象推理建模的思维基础

回顾以上探究历程，我们不难明白问题得以解决的关键所在——对题目意思所作的“直观理解”与最终结果的“直观预测”.

通常在理解题目阶段，需要对题目中的隐含条件和信息进行发掘，将抽象变具体，将隐含变清晰. 而如何将“抽象变具体，将隐含变清晰”，这需要“数学直观”地“从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构”，在这个过程中，“数学抽象素养”得到了培养和发展.

如何引领学生思考“按照怎样的线索、用什么方法去研究问题、解决问题”，

这需要“数学直观”地去“归纳、类比、联想、发现”. 在这个过程中，“逻辑推理素养”得到了培养和发展.

如何引领学生思考“面对一个新的研究对象，从哪些角度发现和提出值得研究的问题？”这需要“数学直观”地去“发现模型、构建模型”. 在这个过

① 本文是福建省教育科学“十三五”规划 2017 年度教育教学改革专项课题《基于直观想象数学核心素养培养的个性化数学研究》（立项批准号：Fjjgzx17－07）的研究成果.

程中,"数学建模素养"得到了培养和发展.

例2(2012年高考新课标卷Ⅰ理科21题)

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\frac{1}{2}x^2$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(Ⅱ)若 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$,求 $(a+1)b$ 的最大值.

解析 第(Ⅰ)问简单,难在第(Ⅱ)问.

由(Ⅰ)知,$f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$,故由 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$ 得:$e^x\geqslant(a+1)x+b$.

现在的问题是,如何由 $e^x\geqslant(a+1)x+b$,求 $(a+1)b$ 的最大值呢?

这是难点,似乎无从下手,还得从"直观上"加以理解.

首先,直观函数 $y=e^x$ 与 $y=(a+1)x+b$ 的图象,要使上式恒成立,必须 $a+1>0$,从而知要使 $(a+1)b$ 最大,必须 $b>0$.

这是"从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出规律和结构"的"数学抽象"过程,所依赖的是"数学直观——直观理解".

其次,直观要使得 $e^x\geqslant(a+1)x+b$ 恒成立,函数 $y=e^x$ 与 $y=(a+1)x+b$ 的图象必须相切.

这是"从一些事实和命题出发,依据逻辑规则推出一个命题"的"逻辑推理"过程,所依赖的是"数学直观——直观判断".

至此,只要设出切点 (x_0,y_0),利用相切条件得出 a、b、x_0 之间的关系,进而得到 $(a+1)b$ 关于 a、b 或 x_0 的目标函数,问题不难获解.

这是"用数学知识与方法构建模型(函数模型)解决问题"的"数学建模"过程,所依赖的是"数学直观——直观预测".

从以上的求解过程中,我们不难明白,正是缘于"直观理解",我们对题目中的隐含条件和信息进行抽象,将抽象变具体,将隐含变清晰,同时借助"直观判断"对问题进行"逻辑推理",借助"直观预测"进行"数学建模".在这个"直观理解、直观判断、直观预测"的"数学直观"过程中,"数学抽象、逻辑推理、数学建模"等数学核心素养得到了培养和发展.

"数学直观"是我们学会用数学的眼光观察现实世界、学会用数学的思维思考现实世界、学会用数学的语言表达现实世界的前提,是我们进行数学抽象、逻辑推理和数学建模的思维基础.

3 直观的途径:直观引来"简洁美"

众所周知,"具体"中蕴含的信息具有丰富性、多样性,观察也可以有不同角度,因而从同一事例中可发现不同规律;同时,表面的东西大家都能看到,"藏在"背后的才有"含金量".

所以,面对具体事例,关键是"你怎么看"? 这是看问题的角度、高度以及切入点,需要知识的支撑,还需要历练.

学生经常出现"不是做不到,而是想不到"的尴尬,主要是他们的阅历还不足以使自己"想得到".

教学中教师要在"你怎么看"上下功夫,即在如何"直观"上下功夫,引领学生直观问题的本质,感知问题特征,努力使他们"想得到",将问题解答得简洁完美.

3.1 直观图形内隐特征

很多题目与图形密切相关,但图形的特征是内隐的,不容易被发现.若能将其特征予以直观,可以获得简单巧妙的解法.

例3(2013年高考新课标卷Ⅰ理科16题)

若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称,则 $f(x)$ 的最大值是________.

解析 本题按常规方法求解较为繁琐,运算量也不小,若能直观函数的图形内隐特征,则可轻松将问题解决,且几乎没有计算量.

首先,直观函数 $f(x)$ 有两个零点 -1 和 1,又因为函数图像关于直线 $x=-2$ 对称,所以感知 $f(x)$ 还有两个零点 -3 和 -5,从而得 $f(x)=-(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$.

其次,直观若将 $f(x)$ 的图像向右平移两个单位,其最大值不会改变,于是问题转化为求函数 $g(x)=-(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$ 的最大值.

易知 $g(x)=-(x^2-9)(x^2-1)=-(x^2-5)^2+16$,其最大值为16,这多简洁!

评析 由于"直观",我们"从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出函数具有4个零

点”,同时从条件出发,“依据逻辑推出若将 $f(x)$ 的图像向右平移两个单位,其最大值不会改变”这一命题.在这个过程中,“数学抽象、逻辑推理”等核心素养得到了发展.

3.2 直观变量变化规律

变量的变化必然有其规律,只有直观变化规律,方能便于我们感知,进而依据变化规律将其轻松求解.

例 4(2014 高考课标全国卷Ⅰ第 8 题)

设 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,且 $\tan\alpha=\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$,则(　　).

A. $3\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$　　B. $2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

C. $3\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

解析　本题按常规方法求解较为繁琐,也需要耗费一定的时间,若能直观变量 α、β 的变化规律,问题瞬间可解.

直观 α 随着 β 的变化而变化,β 可无限趋近于 0,也可无限趋近于 $\frac{\pi}{2}$,于是可将 β 极限化:令 $\beta\to0$,则 $\tan\alpha\to1$,$\alpha\to\frac{\pi}{4}$,验证选项可排除 A、C;令 $\beta\to\frac{\pi}{2}$,则 $\tan\alpha\to+\infty$,$\alpha\to\frac{\pi}{2}$,验证选项可排除 D,故正确答案为 B.

评析　由于“直观”,我们“从数量与数量关系中抽象出 α 与 β 的关系及 β 的变化规律”,同时“依据逻辑进行推理”.在这个过程中,“数学抽象、逻辑推理”等核心素养得到了发展.

3.3 直观点线运动轨迹

点线运动有轨迹,只有直观轨迹特征,方能便于感知,进而依据轨迹特征将问题轻松求解.

例 5(2009 年高考新课标卷Ⅰ理科第 10 题)

若直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 通过点 $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$,则(　　).

A. $a^2+b^2\leqslant1$　　B. $a^2+b^2\geqslant1$

C. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\leqslant1$　　D. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1$

解析　本题按常规方法求解似乎无从下手,若能直观动点 M 的运动轨迹,问题可轻松获解.

直观点 M 的运动轨迹为圆 $x^2+y^2=1$,则问题转化为“直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 有公共点”,从而由圆心到直线距离不大于半径,即得 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\leqslant1$,亦即 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1$,故正确选项为 D.

评析　由于“直观”,我们“从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出动点运动的一般规律”,并“依据逻辑规则进行推理”,将问题的求解进行得轻松自在.在这个过程中,“数学抽象、逻辑推理”核心素养得到了发展.

3.4 直观模型结构特点

直观模型结构特点,进而借助模型求解问题,可将问题轻松予以解决.

如上例 5,由已知可得:$\frac{\cos\alpha}{a}+\frac{\sin\alpha}{b}=1$,直观它就是“$a\sin x+b\cos x=c$”的模型,由此由辅助角公式即得 $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\sin(x+\varphi)=1$,$\sin(x+\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}$.

由 $\sin(x+\varphi)\leqslant1$,得 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}\leqslant1$,即 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant1$,故选 D.

由于“直观”,我们“从数量与数量关系中抽象出一般的模型和结构”,并“用数学知识与方法构建模型解决了问题”.这是一个抽象、建模、推理的过程,在这个过程中,“数学抽象、数学建模、逻辑推理”等核心素养得到了发展.

例 6(2011 年高考大纲全国卷第 12 题)

设向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$,$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60°$,则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值等于

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

解析　本题按常规方法求解异常繁琐,若能直观其模型结构特点,问题轻松可解.

设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$,易知 $\angle AOB=60°$,$\angle ACB=120°$,直观 O、A、C、B 四点共圆,$|\boldsymbol{c}|$ 的最大值即该圆的直径.

由 $\angle AOB=120°$,$|AB|=\sqrt{3}$ 即得该圆的直径为 $\frac{|AB|}{\sin120°}=2$,所以 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$,正确选

项为A.

也是由于"直观",我们"从数量与数量的关系中抽象出一般的模型和结构",并"用数学知识与方法构建模型解决了问题",在这个"抽象、建模、推理"的过程中,"数学抽象、数学建模、逻辑推理"等核心素养得到了发展.

3.5 直观思想立意要领

对于解题,绝大部分学生不是不会方法,而是由于没有站在思想的高度来思考和引领方法,或者是因为思想不明确而想不起来用什么方法来处理问题.因此,指导学生直观思想立意要领,运用思想引领方法就显得尤为重要了!

例7(2010年高考新课标卷Ⅰ理科11题)

已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|,0<x\leqslant 10,\\ -\dfrac{1}{2}x+6,x>10\end{cases}$,

若 a,b,c 互不相等,且 $f(a)=f(b)=f(c)$,则 abc 的取值范围是(　　)

A. $(1,10)$　　B. $(5,6)$

C. $(10,12)$　　D. $(20,24)$

解析　本题如同例4,若能直观问题的一般性:b、c 随着 a 的变化而变化,这样的 a,b,c 有无穷多组,但其乘积 abc 的取值范围不会因为 a 的改变而改变,则可立意于特殊与一般思想将 a 特殊化,如取 $a=\frac{1}{2}$,即得 $b=2$,由 $f(c)=\lg 2$ 得 $c=12-2\lg 2\in(11,12)$,故 $abc\in(11,12)$,易知正确选项为C.

由于"直观",我们"从数量与数量的关系中抽象出一般规律——问题的一般性",再立意于"特殊与一般思想"对问题"从特殊到一般、一般到特殊"地推理,在这个过程中,"数学抽象、逻辑推理"等核心素养得到了发展.

例8(2011年高考新课标卷Ⅰ理科16题)

在$\triangle ABC$中,$B=60°$,$AC=\sqrt{3}$,则 $AB+2BC$ 的最大值为__________.

解析　本题是三角形求解问题,解决问题的通法是"知三求三",但是直观题目只给出一边一角,显然条件少了.

直观这是最值求解问题,需要引入变量,构造出待求最值关于这个变量的函数,为此不妨设 $\angle A=\theta$,则 $\angle C=120°-\theta$,由正弦定理得:

$$\frac{BC}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin(120°-\theta)}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60°},$$

从而 $AB+2BC=2\sin(120°-\theta)+4\sin\theta$

$=5\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sqrt{7}\sin(\theta+\varphi)$,

故 $AB+2BC$ 的最大值为 $2\sqrt{7}$.

由于"直观",我们"从数学的视角发现了问题(最值求解问题),并提出问题、分析问题,构建模型(函数模型)",再"依据逻辑规则进行推理",这是一个抽象、建模、推理的过程.在这个过程中,"数学抽象、数学建模、逻辑推理"等核心素养得到了发展.

4 结语:"直观"恒久,素养终成

经验之中有规律,是我们认识问题的一般过程和方法,也阐明了一个简单但很深刻的教学原理:经验是具体的,规律则是抽象的.规律不是从天而降的,而是从具体经验中经过不断归纳、概括才能得到的.

如何才能培养学生"从经验中发现规律"的能力呢?

首先,要培养学生从"从一般规律的高度考察具体事例"的意识,逐步养成"透过现象看本质"的习惯.这是观念问题,是思维习惯问题,也是思想方法问题,需要一个长期的、潜移默化的过程,需要有意识地培养.

其次,要让学生掌握观察事例、从经验中归纳规律、把具体事例中得到的东西概括到全体中去的基本方法,使他们逐步学会归纳、学会抽象、学会概括,进而形成"从经验中发现规律"的能力.

简言之,就是培养学生"直观"的习惯与"感知"的能力!

"直观"是一个人长期进行数学思维形成的,是逐渐养成的一种思维习惯,这个习惯日积月累就形成了数学素养.

参考文献

[1]史宁中.高中数学核心素养的培养、评价与教学实施[J].中小学教材教学,2017(5)