

2020-21 上学年高三第一次月考

数学试卷

考试时间：120 分钟 满分：150 分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

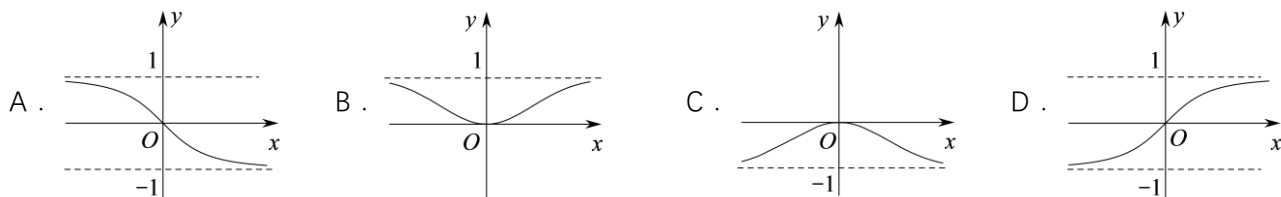
1. 已知集合  $A = \{x | -3 < x < 3\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{N}^* | x^2 - 2x - 8 < 0\}$ , 则  $A \cap B =$

- A.  $\{1, 2\}$       B.  $\{0, 1, 2\}$       C.  $\{1, 2, 3\}$       D.  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 已知复数  $z$  满足  $(2-i)z = |\sqrt{3} + i|$ , 则  $z =$

- A.  $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$       B.  $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$       C.  $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$       D.  $\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i$

3. 函数  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  的图象大致是



4. 已知  $a = 2^{\frac{1}{3}}$ ,  $b = \log_2 \frac{1}{3}$ ,  $c = \log_3 2$ , 则

- A.  $a > b > c$       B.  $c > a > b$       C.  $c > b > a$       D.  $a > c > b$

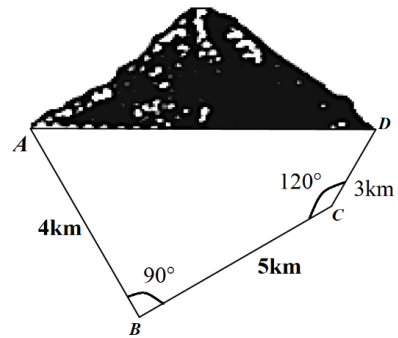
5. 函数  $f(x) = \log_2(x^2 - 2x - 3)$  的单调递减区间为

- A.  $(1, +\infty)$       B.  $(3, +\infty)$       C.  $(-\infty, -1)$       D.  $(-\infty, 1)$

6. 若 4 个人按原来站的位置重新站成一排, 恰有 1 个人站在自己原来的位置, 则不同的站法共有

- A. 4 种      B. 8 种      C. 12 种      D. 24 种

7. 自古以来, 人们对于崇山峻岭都心存敬畏, 同时感慨大自然的鬼斧神工, 一代诗圣杜甫曾赋诗《望岳》: “岱宗夫如何? 齐鲁青未了. 造化钟神秀, 阴阳割昏晓. 荡胸生层云, 决眦入归鸟. 会当凌绝顶, 一览众山小.” 然而, 随着技术手段的发展, 山高路远便不再人们出行的阻碍, 伟大领袖毛主席曾作词: “桥飞架南北, 天堑变通途”. 在科技腾飞的当下, 路桥建设部门仍然潜心研究如何缩短空间距离方便出行, 如港珠澳跨海大桥等. 如图为某工程队将  $A$  到  $D$  修建条隧道,



测量员测得些数据如图所示 ( $A, B, C, D$  在同一水平面内), 则  $A, D$  间的距离为

- A.  $\sqrt{65-12\sqrt{3}}$  km    B.  $\sqrt{65-12\sqrt{13}}$  km  
 C.  $\sqrt{35-12\sqrt{3}}$  km    D.  $\sqrt{35-12\sqrt{13}}$  km

8. 已知定义在  $R$  上的函数  $y=f(x)$ , 其周期为 2, 且  $x \in (-1, 1]$  时,  $f(x)=1+x^2$ , 函数

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \sin \pi x & (x \geq 0) \\ 1 - \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}, \text{ 则函数 } h(x) = f(x) - g(x) \text{ 在区间 } [-3, 5] \text{ 上的零点个数为}$$

- A. 8                                  B. 9                                  C. 10                                  D. 11

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。每小题有多个正确选项, 选不全得 3 分, 错选不得分。

9. 下列说法正确的是.

- A. 对于命题  $P: \exists x_0 \in R$ , 使得  $x_0 + \frac{1}{x_0} > 2$ , 则  $\neg P: \forall x \in R$ , 均有  $x + \frac{1}{x} \leq 2$
- B. “ $x=1$ ” 是 “ $x^2-3x+2=0$ ” 的充分不必要条件
- C. 命题 “若  $x^2-3x+2=0$ , 则  $x=1$ ” 的逆否命题为: “若  $x \neq 1$ , 则  $x^2-3x+2 \neq 0$ ”
- D. 若  $P \wedge Q$  为假命题, 则  $P, Q$  均为假命题

10. 函数  $f(x)$  同时满足: ①对于定义域上的任意  $x$ , 恒有  $f(x)+f(-x)=0$ ; ②对于定义域上的任意

$x_1, x_2$ . 当  $x_1 \neq x_2$ , 恒有  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ . 则称函数  $f(x)$  为“理想函数”, 则下列四个函数中, 为“理

想函数”的是

- A.  $f(x) = \frac{1}{x}$     B.  $f(x) = x^2$     C.  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$     D.  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x$

11. 下面代数式, 最小值为 4 的有

- A.  $x + \frac{1}{x-1} + 1$  ( $x > 1$ )  
 B.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6$ , 其中  $x, y \in R$   
 C.  $\sin x + \frac{4}{\sin x}$ , 其中  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$   
 D.  $3^{x-1} + \log_2 x$  ( $x \geq 2$ )

12 以下命题成立的是

- A. 函数  $y = f(x+1)$  是偶函数, 则  $y = f(x)$  关于直线  $x=1$  对称  
 B. 盒子中有 5 张奖卷, 只有一张上面写着“中奖”, 其它四张上都写着“谢谢”。学生甲先抽, 已知甲抽中的是“谢谢”, 学生乙接着抽, 则乙抽到“中奖”的概率为  $\frac{1}{5}$ 。  
 C. 某个红绿灯路口的红灯持续时间共为 50 秒钟。李先生开车到达路口时, 此时信号灯显示为红灯, 则他等候红灯时间不超过 30 秒的概率为  $\frac{3}{5}$ 。  
 D.  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位得到一奇函数。

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $\begin{cases} 2x+y \leq 2 \\ x+2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x + y$  的最大值为\_\_\_\_\_。

14. 平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}|$  的值为\_\_\_\_\_。

15.  $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$  的展开式中的所有项系数和为\_\_\_\_\_，展开式的常数项是\_\_\_\_\_（用数字作答）

16. 锐角  $\triangle ABC$  中， $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $c = 1$ ，则  $\triangle ABC$  的面积取值范围为\_\_\_\_\_

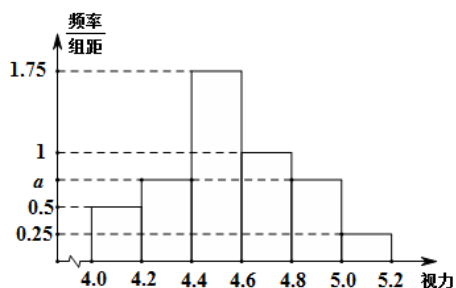
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程及演算步骤。其中第 17 题满分 10 分，其余各题满分 12 分。

17. 已知向量  $\vec{OA} = (1, 2)$ ,  $\vec{OB} = (m, -2)$ ,  $\vec{OC} = (-3, 1)$ ， $O$  为坐标原点。

(1) 若  $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ ，求实数  $m$  的值；

(2) 在 (1) 的条件下，求  $\vec{OA}$  与  $\vec{OB}$  所成角的余弦值。

18. 某学校为了了解同学们现阶段的视力情况，对全校高三 1000 名学生的视力情况进行了调查，从中随机抽取了 100 名学生的体检表，绘制了频率分布直方图如图：



	前 50 名	后 50 名
近视	42	32
不近视	8	18

(1) 求  $a$  的值，并估计这 1000 名学生视力的中位数（精确到 0.01）；

(2) 为了进一步了解视力与学生成绩是否有关，对本年级名次在前 50 名与后 50 名的学生进行了调查，得到如上右图表格数据：根据表中数据，能否有 95% 把握认为视力与学习成绩有关？

(3) 若报考某高校某专业的资格为：视力不低于 5.0，以该样本数据来估计全市高三学生的视力，现从全市视力在 4.8 以上的同学中随机抽取 4 名同学，这 4 名同学中有资格报该校该专业的人数为  $X$ ，求  $X$  的分布列及数学期望。

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
$k$	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

其中

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

19. 已知  $f(x) = x + \sqrt{2-x}$ ,  $g(x) = x^2 - 2mx + 1$

(1) 分别求函数  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  的值域  $A, B$ ;

(2) 若  $C = A \cap B$ , 集合  $C$  中有且只有三个整数, 求实数  $m$  的取值范围。

20. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $b \cos C = a \cos^2 B + b \cos A \cos B$

(1) 求证:  $\triangle ABC$  是等腰三角形;

(2) 若  $\cos A = \frac{7}{8}$ , 且  $\triangle ABC$  的周长为 5, 求  $\triangle ABC$  的面积.

21. 定义在  $[-3, 3]$  上的奇函数  $f(x)$ , 已知当  $x \in [-3, 0]$  时,  $f(x) = \frac{1}{4^x} + \frac{a}{3^x}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 求  $f(x)$  在  $(0, 3]$  上的解析式;

(3) 若存在  $x \in [-2, -1]$  时, 使不等式  $f(x) \leq \frac{m}{2^x} - \frac{1}{3^{x-1}}$  成立, 求实数  $m$  的取值范围

22. 2020 年初, 新冠肺炎袭击全国, 某省由于人员流动性较大, 成为湖北外疫情最严重的省份之一, 截止 2 月 29 日, 该省已累计确诊 1349 例患者 (无境外输入病例).

(1) 为了了解新冠肺炎的相关特征, 研究人员统计了他们的年龄数据, 可以大致认为, 该省新冠肺炎患者的年龄  $Z$  服从正态分布  $N(54.8, 15.2^2)$ , 请估计该省新冠肺炎患者年龄在 70 岁以上的患者比例;

(2) 截至 2 月 29 日, 该省新冠肺炎的密切接触者 (均已接受检测) 中确诊患者约占 10%, 以这些密切接触者确诊的频率代替 1 名密切接触者确诊发生的概率, 每名密切接触者是否确诊相互独立, 现有密切接触者 20 人, 为检测出所有患者, 设计了如下方案: 将这 20 名密切接触者随机地按  $n$  ( $n$  可以取 2, 4, 5, 10) 个人一组平均分组, 并将同组  $n$  个人每人抽取的一半血液混合在一起化验, 若发现新冠病毒, 则对该组的  $n$  个人抽取的另一半血液逐一化验, 以化验次数的期望值为决策依据, 试确定使得 20 人的化验总次数最少的  $n$  的值.

参考数据: 若  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$ ,  $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$ ,

$P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9973$ .  $0.9^4 \approx 0.66$ ,  $0.9^5 \approx 0.59$ ,  $0.9^{10} \approx 0.35$

草稿纸