

2020-21 上 学 年 高 三 第 一 次 月 考

数 学 试 卷

考 试 时 间：120 分 钟 满 分：150 分

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

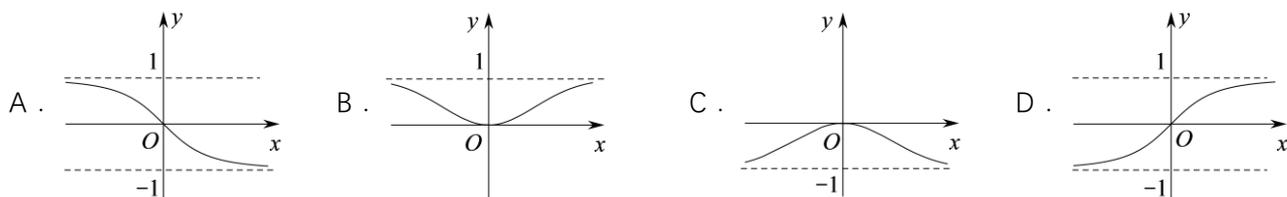
1. 已知集合 $A = \{x | -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N}^* | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2. 已知复数 z 满足 $(2-i)z = |\sqrt{3} + i|$, 则 $z =$

- A. $\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ B. $\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ C. $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i$ D. $\frac{4}{3} - \frac{2}{3}i$

3. 函数 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 的图象大致是



4. 已知 $a = 2^{\frac{1}{3}}$, $b = \log_2 \frac{1}{3}$, $c = \log_3 2$, 则

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $c > b > a$ D. $a > c > b$

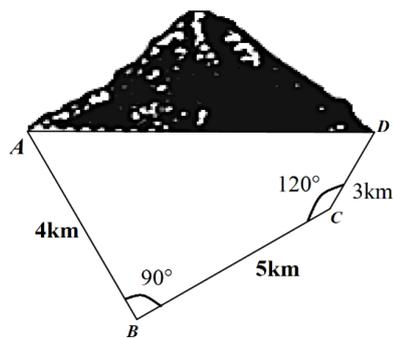
5. 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递减区间为

- A. $(1, +\infty)$ B. $(3, +\infty)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, 1)$

6. 若 4 个人按原来站的位置重新站成一排，恰有 1 个人站在自己原来的位置，则不同的站法共有

- A. 4 种 B. 8 种 C. 12 种 D. 24 种

7. 自古以来, 人们对于崇山峻岭都心存敬畏, 同时感慨大自然的鬼斧神工, 一代诗圣杜甫曾赋诗《望岳》: “岱宗夫如何? 齐鲁青未了. 造化钟神秀, 阴阳割昏晓. 荡胸生层云, 决眦入归鸟. 会当凌绝顶, 一览众山小.” 然而, 随着技术手段的发展, 山高路远便不再人们出行的阻碍, 伟大领袖毛主席曾作词: “桥飞架南北, 天堑变通途”. 在科技腾飞的当下, 路桥建设部门仍然潜心研究如何缩短空间距离方便出行, 如港珠澳跨海大桥等. 如图为某工程队将 A 到 D 修建条隧道,



测量员测得些数据如图所示 (A, B, C, D 在同一水平面内), 则 A, D 间的距离为

- A. $\sqrt{65-12\sqrt{3}}$ km B. $\sqrt{65-12\sqrt{13}}$ km
 C. $\sqrt{35-12\sqrt{3}}$ km D. $\sqrt{35-12\sqrt{13}}$ km

8. 已知定义在 R 上的函数 $y=f(x)$, 其周期为 2, 且 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x)=1+x^2$, 函数

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \sin \pi x & (x \geq 0) \\ 1 - \frac{1}{x} & (x < 0) \end{cases}, \text{ 则函数 } h(x) = f(x) - g(x) \text{ 在区间 } [-3, 5] \text{ 上的零点个数为}$$

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。每小题有多个正确选项, 选不全得 3 分, 错选不得分。

9. 下列说法正确的是.

- A. 对于命题 $P: \exists x_0 \in R$, 使得 $x_0 + \frac{1}{x_0} > 2$, 则 $\neg P: \forall x \in R$, 均有 $x + \frac{1}{x} \leq 2$
- B. “ $x=1$ ” 是 “ $x^2-3x+2=0$ ” 的充分不必要条件
- C. 命题 “若 $x^2-3x+2=0$, 则 $x=1$ ” 的逆否命题为: “若 $x \neq 1$, 则 $x^2-3x+2 \neq 0$ ”
- D. 若 $P \wedge Q$ 为假命题, 则 P, Q 均为假命题

10. 函数 $f(x)$ 同时满足: ①对于定义域上的任意 x , 恒有 $f(x)+f(-x)=0$; ②对于定义域上的任意 x_1, x_2 . 当 $x_1 \neq x_2$, 恒有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$. 则称函数 $f(x)$ 为“理想函数”, 则下列四个函数中, 为“理想函数”的是

- A. $f(x) = \frac{1}{x}$ B. $f(x) = x^2$ C. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$ D. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - x$

11. 下面代数式, 最小值为 4 的有

- A. $x + \frac{1}{x-1} + 1$ ($x > 1$)
 B. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6$, 其中 $x, y \in R$
 C. $\sin x + \frac{4}{\sin x}$, 其中 $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$
 D. $3^{x-1} + \log_2 x$ ($x \geq 2$)

12 以下命题成立的是

- A. 函数 $y = f(x+1)$ 是偶函数, 则 $y = f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称
 B. 盒子中有 5 张奖卷, 只有一张上面写着“中奖”, 其它四张上都写着“谢谢”。学生甲先抽, 已知甲抽中的是“谢谢”, 学生乙接着抽, 则乙抽到“中奖”的概率为 $\frac{1}{5}$ 。
 C. 某个红绿灯路口的红灯持续时间共为 50 秒钟。李先生开车到达路口时, 此时信号灯显示为红灯, 则他等候红灯时间不超过 30 秒的概率为 $\frac{3}{5}$ 。
 D. $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到一奇函数。

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ x + 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为_____。

14. 平面向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \perp (2\vec{a} - \vec{b})$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的值为_____。

15. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的所有项系数和为_____，展开式的常数项是_____（用数字作答）

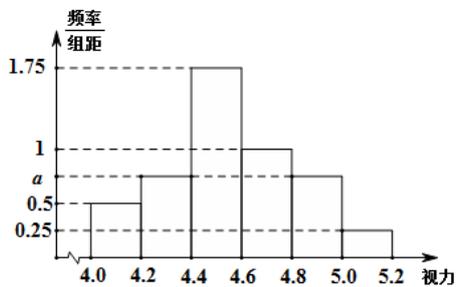
16. 锐角 $\triangle ABC$ 中， $B = \frac{\pi}{3}$, $c = 1$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积取值范围为_____

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程及演算步骤。其中第 17 题满分 10 分，其余各题满分 12 分。

17. 已知向量 $\vec{OA} = (1, 2)$, $\vec{OB} = (m, -2)$, $\vec{OC} = (-3, 1)$ ， O 为坐标原点。

- (1) 若 $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ ，求实数 m 的值；
- (2) 在 (1) 的条件下，求 \vec{OA} 与 \vec{OB} 所成角的余弦值。

18. 某学校为了了解同学们现阶段的视力情况，对全校高三 1000 名学生的视力情况进行了调查，从中随机抽取了 100 名学生的体检表，绘制了频率分布直方图如图：



	前 50 名	后 50 名
近视	42	32
不近视	8	18

- (1) 求 a 的值，并估计这 1000 名学生视力的中位数（精确到 0.01）；
- (2) 为了进一步了解视力与学生成绩是否有关，对本年级名次在前 50 名与后 50 名的学生进行了调查，得到如上右图表格数据：根据表中数据，能否有 95% 把握认为视力与学习成绩有关？
- (3) 若报考某高校某专业的资格为：视力不低于 5.0，以该样本数据来估计全市高三学生的视力，现从全市视力在 4.8 以上的同学中随机抽取 4 名同学，这 4 名同学中有资格报该校该专业的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望。

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

其中

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

19. 已知 $f(x) = x + \sqrt{2-x}$, $g(x) = x^2 - 2mx + 1$

(1) 分别求函数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的值域 A, B ;

(2) 若 $C = A \cap B$, 集合 C 中有且只有三个整数, 求实数 m 的取值范围。

20. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $b \cos C = a \cos^2 B + b \cos A \cos B$

(1) 求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形;

(2) 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, 且 $\triangle ABC$ 的周长为 5, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. 定义在 $[-3, 3]$ 上的奇函数 $f(x)$, 已知当 $x \in [-3, 0]$ 时, $f(x) = \frac{1}{4^x} + \frac{a}{3^x}$ ($a \in \mathbb{R}$).

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在 $(0, 3]$ 上的解析式;

(3) 若存在 $x \in [-2, -1]$ 时, 使不等式 $f(x) \leq \frac{m}{2^x} - \frac{1}{3^{x-1}}$ 成立, 求实数 m 的取值范围

22. 2020 年初, 新冠肺炎袭击全国, 某省由于人员流动性较大, 成为湖北外疫情最严重的省份之一, 截止 2 月 29 日, 该省已累计确诊 1349 例患者 (无境外输入病例).

(1) 为了了解新冠肺炎的相关特征, 研究人员统计了他们的年龄数据, 可以大致认为, 该省新冠肺炎患者的年龄 Z 服从正态分布 $N(54.8, 15.2^2)$, 请估计该省新冠肺炎患者年龄在 70 岁以上的患者比例;

(2) 截至 2 月 29 日, 该省新冠肺炎的密切接触者 (均已接受检测) 中确诊患者约占 10%, 以这些密切接触者确诊的频率代替 1 名密切接触者确诊发生的概率, 每名密切接触者是否确诊相互独立, 现有密切接触者 20 人, 为检测出所有患者, 设计了如下方案: 将这 20 名密切接触者随机地按 n (n 可以取 2, 4, 5, 10) 个人一组平均分组, 并将同组 n 个人每人抽取的一半血液混合在一起化验, 若发现新冠病毒, 则对该组的 n 个人抽取的另一半血液逐一化验, 以化验次数的期望值为决策依据, 试确定使得 20 人的化验总次数最少的 n 的值.

参考数据: 若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < Z < \mu + 2\sigma) = 0.9544$,

$P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9973$. $0.9^4 \approx 0.66$, $0.9^5 \approx 0.59$, $0.9^{10} \approx 0.35$

草稿纸