江苏省仪征中学2019届高三年级第一学期12月份冲刺联考热身训练（2）

班级__________姓名__________学号__________日期__________

一、填空题：

1．若$(a+b\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})=25$ (a，$b\in\mathrm{R}$，i为虚数单位)，则$a+b$的值为______．

2．若集合$P=\{-1，0，1，2\}$，$Q=\{0，2，3\}$，则$P\cap Q=$______．

3．某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有150，150，400，300名学生．为了解学生的就业倾向，用分层抽样的方法从该校这四个专业中抽取40名学生进行调查，则应从丙专业抽取的学生人数为______．

```
I←2
S←0
While  I<13
   S←S+I
   I←I+2
End  while
Print  S
End
```

4．根据如图所示的伪代码，可知输出的结果S为________．

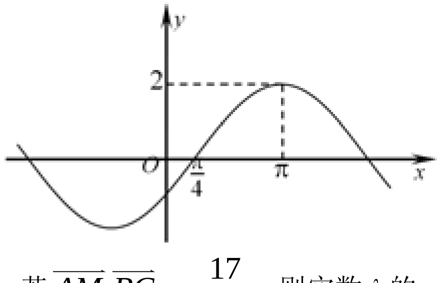
5．记函数$f\left(x\right)=\sqrt{4-3x-x^2}$ 的定义域为D．若在区间$[-5，5]$上随机取一个数x，则$x\in D$的概率为______．

6．在平面直角坐标系xOy中，双曲线$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的焦点到其渐近线的距离为______．

7．记等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n．若$a_m=10$，$S_{2m-1}=110$， 则m的值为______．

8．有下列命题：①若直线l平行于平面α内的无数条直线，则直线$l/\!/\alpha$；②若直线a在平面α外，则$a/\!/\alpha$；③若直线$a/\!/b$，$b/\!/\alpha$，则$a/\!/\alpha$；④若直线$a/\!/b$，$b/\!/\alpha$，则a平行于平面α内的无数条直线．其中真命题的个数是________．

9．若函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，|\varphi|<\pi)$的部分图象如图所示，则$f(-\pi)$的值为______．



10．在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=2$，$\angle BAC=120$，$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}$．若$\overrightarrow{AM}\ \overrightarrow{BC}=-\dfrac{17}{3}$，则实数$\lambda$的值为______．

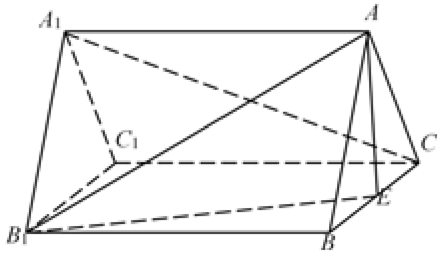
11．已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，且在$(-\infty，0]$上为单调增函数．若$f(-1)=-2$，则满足$f(2x-3)\le 2$的x的取值范围是______．

12．若$a>b>0$，则$a^2+\dfrac{1}{b(a-b)}$的最小值为________．

二、解答题：

1.在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC$，E 是 BC 的中点，求证：

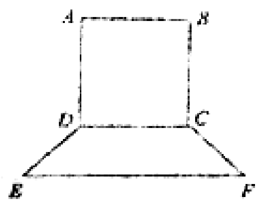
（1）平面 $AB_1E\perp$ 平面 B_1BCC_1；（2）$A_1C//$平面 AB_1E.



2. 要制作一个如图的框架（单位：米）. 要求所围成的总面积为19.5（米^2），其中 $ABCD$ 是一个矩形，$EFCD$ 是一个等腰梯形，梯形高 $h=\dfrac{1}{2}AB$，$tan\angle FED=\dfrac{3}{4}$，设 $AB=x$ 米，$BC=y$ 米.

（1）求 y 关于 x 的表达式；

（2）如何设计 x，y 的长度，才能使所用材料最少？



3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $F_1(-1, 0)$， $F_2(1, 0)$，动点 $P(x, y)$ 满足 $PF_1+PF_2=2\sqrt{2}$，设动点 P 的轨迹为曲线 E .

（1）求曲线 E 的方程；

（2）设直线 l： $x=a$ 与曲线 E 自上而下交于点 C， D，又 PC， PD 与 x 轴分别交于点 A， B，

①若 $a=0$，求证： $OA\cdot OB$ 为定值；

②若 $a\neq 0$，试探究： $OA\cdot OB$ 是否为定值？并说明理由.

三、附加题：

1. 设二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{-1};（2）若曲线 C 在矩阵 A 对应的变换作用下得到曲线 C': $6x^2-y^2=1$，求曲线 C 的方程.

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数），圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+cos\theta\\ y=2a+sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）. 若直线 l 与圆 C 相切，求实数 a 的值.

3. 袋中有形状和大小完全相同的四种不同颜色的小球，每种颜色的小球各有 4 个，分别编号为 1，2，3，4. 现从袋中随机取两个球.

（1）若两个球颜色不同，求不同取法的种数；

（2）在（1）的条件下，记两球编号的差的绝对值为随机变量 X，求随机变量 X 的概率分布与数学期望.

高三年级第一学期12月份冲刺联考热身训练（2）答案

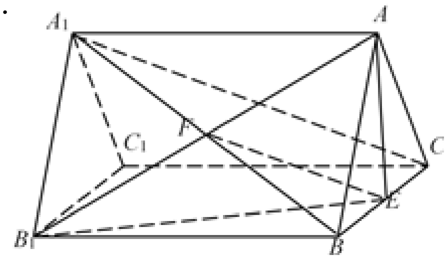
一、填空题：

1．7；2．{0，2}；3．16；4. 42；　5. $\frac{1}{2}$；6．3；7．6；8. 1；9.−1；10．$\frac{1}{3}$；11．(−∞，2]；

12．4.

二、解答题：

1. 证明：（1）在直三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，CC_1⊥平面 ABC.



因为 AE⊂平面 ABC，

所以 CC_1⊥AE.

因为 AB＝AC，E 为 BC 的中点，所以 AE⊥BC.

因为 BC⊂平面 B_1BCC_1，CC_1⊂平面 B_1BCC_1，

且 BC∩CC_1＝C，所以 AE⊥平面 B_1BCC_1.　　因为 AE⊂平面 AB_1E，所以平面 AB_1E⊥平面 B_1BCC_1.

（2）连接 A_1B，设 A_1B∩AB_1＝F，连接 EF.

在直三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1B_1B 为平行四边形，所以 F 为 A_1B 的中点.

又因为 E 是 BC 的中点，所以 EF∥A_1C.　　因为 EF⊂平面 AB_1E，A_1C⊂平面 AB_1E，

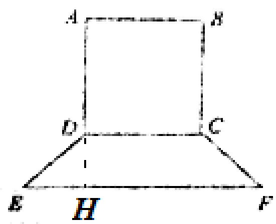
所以 A_1C∥平面 AB_1E.

2. 解：（1）如图：等腰梯形 $CDEF$ 中，DH 是高，

依题意：$DH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}x$，$EH=\frac{DH}{\tan\angle FED}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}x$.

$\therefore \frac{39}{2}=xy+\frac{1}{2}\left(x+x+\frac{4}{3}x\right)\frac{1}{2}x=xy+\frac{5}{6}x^2$，

$\therefore y=\frac{39}{2x}-\frac{5}{6}x$. $\because x>0$，$y>0$，$\therefore \frac{39}{2x}-\frac{5}{6}x>0$，解之得：$0<x<\frac{3\sqrt{65}}{5}$.



∴所求表达式为 $y=\frac{39}{2x}-\frac{5}{6}x$（$0<x<\frac{3\sqrt{65}}{5}$）.

（2）$\mathrm{Rt}\Delta DEH$ 中，$\because \tan\angle FED=\frac{3}{4}$，$\therefore \sin\angle FED=\frac{3}{5}$，

$\therefore DE=\frac{DH}{\sin\angle FED}=\frac{1}{2}x\times\frac{5}{3}=\frac{5}{6}x$.

$\therefore l=(2x+2y)+2\times\frac{5}{6}x+\left(2\times\frac{2}{3}x+x\right)=2y+6x=\frac{39}{x}-\frac{5}{3}x+6x=\frac{39}{x}+\frac{13}{3}x\ge$

$2\sqrt{\frac{39}{x}\times\frac{13x}{3}}=26$. 当且仅当 $\frac{39}{x}=\frac{13}{3}x$，即 $x^2=9$，即 $x=3$ 时取等号，此时 $y=\frac{39}{2x}-\frac{5}{6}x=4$.

$\therefore AB=3$ 米，$BC=4$ 米时，能使整个框架用材料最少.

3. 解：（1）易得动点 $P(x,y)$ 的轨迹为以 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 为焦点，$2\sqrt{2}$ 为长轴长的椭圆，　故 $c=1$，

$a=\sqrt{2}$，　又 $c^2=a^2-b^2$，得 $b^2=1$，从而曲线 E 的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；… 5分

（2）①证明：当 $a=0$ 时，设点 $P(x_0,y_0)$，且 $\frac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1$，

则直线 PC 的方程为：$y-1=\frac{y_0-1}{x_0}x$，令 $y=0$ 得，$x_A=\frac{x_0}{1-y_0}$，

直线 PD 的方程为：$y+1=\frac{y_0+1}{x_0}x$，令 $y=0$ 得，$x_B=\frac{x_0}{1+y_0}$，　……… 7分

故 $OA\cdot OB=\frac{x_0}{1-y_0}\cdot\frac{x_0}{1+y_0}=\frac{{x_0}^2}{1-{y_0}^2}=2$；　………10分

②当 $a\ne0$ 时，$OA\cdot OB$ 仍为定值2，证明如下：

设 $P(x_0,y_0)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_1,-y_1)$，且 $\frac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1$，$\frac{{x_1}^2}{2}+{y_1}^2=1$，　………12分

则直线 PC 的方程为：$y-y_1=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}(x-x_1)$，令 $y=0$ 得，$x_A=\frac{x_1y_0-x_0y_1}{y_0-y_1}$，

直线 PD 的方程为：$y+y_1=\frac{y_0+y_1}{x_0-x_1}(x-x_1)$，令 $y=0$ 得，$x_B=\frac{x_1y_0+x_0y_1}{y_0+y_1}$，…… 14分

故 $OA\cdot OB=\frac{x_1y_0-x_0y_1}{y_0-y_1}\cdot\frac{x_1y_0+x_0y_1}{y_0+y_1}=\frac{{x_1}^2{y_0}^2-{x_0}^2{y_1}^2}{{y_0}^2-{y_1}^2}=\frac{2\left(1-{y_1}^2\right){y_0}^2-2\left(1-{y_0}^2\right){y_1}^2}{{y_0}^2-{y_1}^2}$

$=\frac{2\left({y_0}^2-{y_1}^2\right)}{{y_0}^2-{y_1}^2}=2$.　……… 16 分

三、附加题：

1.解：（1）根据逆矩阵公式，可得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

（2）设曲线 C 上任意一点 $P(x，y)$在矩阵 A 对应的变换作用下得到点 $P(x',y')$，

则$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y\\3x+4y\end{bmatrix}$，所以$\begin{cases}x'=x+2y\\y'=3x+4y\end{cases}$

因为$\left(x',y'\right)$在曲线C'上，所以$6x'^2-y'^2=1$，代入$6(x+2y)^2-(3x+4y)^2=1$，化简得$8y^2-3x^2=1$，所以曲线C的方程为$8y^2-3x^2=1$.

2.

试题解析：解：由直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-1+t\\y=t\end{cases}$，得直线$l$的普通方程为$x-y+1=0$.

由圆C的参数方程为$\begin{cases}x=a+cos\theta\\y=2a+sin\theta\end{cases}$，得圆$C$的普通方程为$(x-a)^2+(y-2a)^2=1$.

因为直线l与圆C相切，所以$\dfrac{|a-2a+1|}{\sqrt{2}}=1$，　　解得$a=1\pm\sqrt{2}$.

所以实数a的值为$1\pm\sqrt{2}$.

3. 解：（1）两个球颜色不同的情况共有$C_4^2\cdot4^2=96$(种).

（2）随机变量X所有可能的值为0，1，2，3.

$P(X=0)=\dfrac{4C_4^2}{96}=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$,

$P(X=1)=\dfrac{3C_4^1C_3^1}{96}=\dfrac{3}{8}$,

$P(X=2)=\dfrac{2C_4^1C_3^1}{96}=\dfrac{1}{4}$,

$P(X=3)=\dfrac{C_4^1C_3^1}{96}=\dfrac{1}{8}$

所以随机变量X的概率分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

所以$E(X)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{1}{4}+3\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{4}$.