试卷类型:A

高三一轮检测

数　学　试　题

2021.03

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\middle|x^2-x-6\leqslant 0\right\}$,$B=\left\{x\middle|x^2>4\right\}$,则 $A\cap B=$

A. $(2,3)$　　B. $[2,3]$　　C. $(2,3]$　　D. $[2,3]\cup\{-2\}$

2. 已知 i 是虚数单位,若复数 $z=\dfrac{5}{4+3i}$,则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$　　B. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　C. $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$　　D. $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$

3. 已知命题 p:$\forall x\in\mathrm{R}$,$ax^2+ax+1>0$,命题 q:函数 $y=-(a+1)^x$ 是减函数,则命题 p 成立是 q 成立的

A. 充分不必要条件　　B. 充要条件

C. 必要不充分条件　　D. 即不充分也不必要条件

4. 2020年11月,中国国际进口博览会在上海举行,本次进博会设置了“云采访”区域,通过视频连线,帮助中外记者采访因疫情影响无法来沪参加进博会的跨国企业CEO或海外负责人.某新闻机构安排4名记者和3名摄影师对本次进博会进行采访,其中2名记者和1名摄影师负责“云采访”区域的采访,另外2名记者和2名摄影师分两组(每组记者和摄影师各1人),分别负责“汽车展区”和“技术装备展区”的现场采访.如果所有记者、摄影师都能承担三个采访区域的相应工作,则所有不同的安排方案有

A. 36种　　B. 48种　　C. 72种　　D. 144种

5. 已知直线$x+y+2=0$与圆$x^2+y^2+2x-2y+a=0$有公共点，则实数a的取值范围为

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $[0,2)$　　D. $(-\infty,2)$

6. 已知定义在R上的偶函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，则

A. $f(2^{-\frac{3}{4}})<f(\log_{\frac{1}{4}}6)<f(\log_4\frac{1}{5})$　　B. $f(\log_{\frac{1}{4}}6)<f(\log_4\frac{1}{5})<f(2^{-\frac{3}{4}})$

C. $f(\log_{\frac{1}{4}}6)<f(2^{-\frac{3}{4}})<f(\log_4\frac{1}{5})$　　D. $f(2^{-\frac{3}{4}})<f(\log_4\frac{1}{5})<f(\log_{\frac{1}{4}}6)$

7. 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为1，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为

A. 5π　　B. π　　C. $\frac{11}{3}\pi$　　D. $\frac{7}{3}\pi$

8. 设S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_n>0$，$a_1=\frac{1}{2}$，$S_n<2$，则数列$\{a_n\}$的公比的取值范围是

A. $(0,\frac{3}{4}]$　　B. $(0,\frac{2}{3}]$　　C. $(0,\frac{3}{4})$　　D. $(0,\frac{2}{3})$

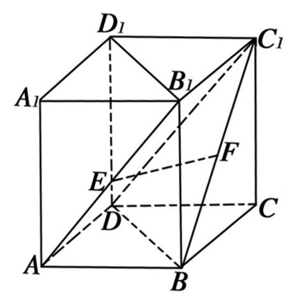
二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分。

9. 设正实数a,b满足$a+b=1$，则

A. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$　　B. $ab+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{17}{4}$

C. $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\leqslant 3+2\sqrt{2}$　　D. $2^{a-b}>\frac{1}{2}$

10. 如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC$，E,F分别是AB_1，BC_1的中点，则下列结论成立的是



A. $EF\perp BB_1$

B. $EF\perp$平面BDD_1B_1

C. EF与C_1D所成角为45°

D. EF∥平面$A_1B_1C_1D_1$

11. 已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=\frac{x-1}{e^x}$，则下列结论正确的是

A. 当$x<0$时，$f(x)=-e^x(x+1)$

B. 函数$f(x)$在R上有且仅有三个零点

C. 若关于x的方程$f(x)=m$有解，则实数m的取值范围是$\{m\,|\,f(-2)\leqslant m\leqslant f(2)\}$

D. $\forall x_1,x_2\in R$，$|f(x_2)-f(x_1)|<2$

12. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\cos(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 在 $x\in[0,\frac{5\sqrt{2}}{2}]$ 的图象恰有三个不同的交点P,M,N.若 $\triangle PMN$ 为直角三角形,则

A. $\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ B. $\triangle PMN$ 的面积 $S=\pi$

C. $\varphi\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ D. 两函数图象必在 $x=\frac{9\pi-4\varphi}{4\omega}$ 处有交点

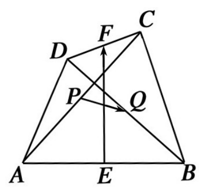
三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,则 $1-\sin2\alpha=$________.

14. 某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如下表:

广告费用 x(万元)	4	2	3	5
销售额 y(万元)	49	26	39	54

根据上表可得回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为9.4,据此模型预报广告费用为6万元时销售额为______万元.



15. 如图,在平面四边形 $ABCD$ 中,已知 $AD=3$,$BC=4$,E,F 分别为 AB,CD 的中点,P,Q 分别为对角线 AC,BD 的中点,则 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{EF}$ 的值为______.

16. 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线 l,交抛物线 C 的准线于点 A,与抛物线 C 的一个交点为 B,且 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BF}$ $(k\geqslant\sqrt{2})$.若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线垂直,则该双曲线离心率的取值范围是______.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10分)

在①$a_8=2a_4+1$,②4是 a_1,a_3 的等比中项,③$S_5=4a_1a_2$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,并作答.

问题:已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$S_3=a_6-a_1$,且__________.

(1)求 a_n;

(2)设数列 $\{\frac{1}{S_n+n}\}$ 的前 n 项和为 T_n,试比较 T_n 与 $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 的大小,并说明理由.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

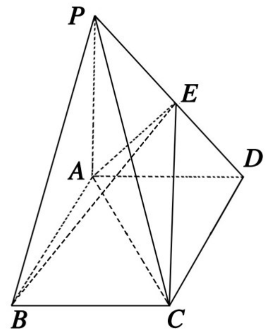
18.(12分)

已知函数 $f(x)=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})+\cos^2x$.

(1)求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上的最值;

(2)在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$f(\frac{A}{2})=1$,$a=2\sqrt{3}$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,求 $\sin B+\sin C$ 的值.

19. (12分)



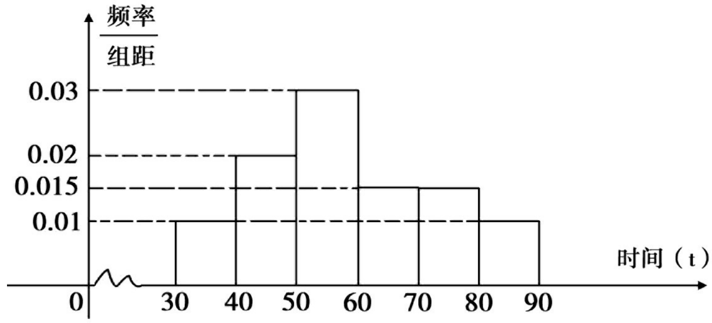
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AB=2AD=2$，$PA\perp$ 平面$ABCD$，E 为 PD 中点.

(1)若 $PA=1$，求证：$AE\perp$ 平面PCD；

(2)当直线 PC 与平面 ACE 所成角最大时，求三棱锥 $E-ABC$ 的体积.

20. (12分)

某市为了了解本市初中生周末运动时间，随机调查了3000名学生，统计了他们的周末运动时间，制成如图所示的频率分布直方图.



(1)按照分层抽样，从[40，50)和[80，90)中随机抽取了9名学生.现从已抽取的9名学生中随机推荐3名学生参加体能测试.记推荐的3名学生来自[40，50)的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

(2)由频率分布直方图可认为：周末运动时间 t 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中，μ 为周末运动时间的平均数 $\bar{t}$，σ 近似为样本的标准差 s，并已求得 $s\approx 14.6$.可以用该样本的频率估计总体的概率，现从本市所有初中生中随机抽取12名学生，记周末运动时间在(43.9，87.7]之外的人数为 Y，求 $P(Y=3)$(精确到0.001).

参考数据1：当 $t\sim N((\mu,\sigma^2)$ 时，$P(\mu-\sigma<t\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$，

$P(\mu-2\sigma<t\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<t\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$

参考数据2：$0.8185^9=0.1649$　　$0.1815^3=0.0060$

21. (12分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，短轴长为 $2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)已知 A，B 是椭圆 C 上的两个不同的动点，以线段 AB 为直径的圆经过坐标原点 O.是否存在以 O 为圆心的定圆恒与直线 AB 相切？若存在，求出定圆方程;若不存在，请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{2}x^2+(2a-1)x\ (a\in R)$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的极值点的个数；

(2)已知函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-f'(x)$ 有两个不同的零点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.

证明：$x_2-x_1<\dfrac{4a^2-2a-1}{2a-1}$.