大学视角下的中学数学(泰勒展开)

李尚志

(北京航空航天大学 100083)

例 1 (2018 理科数学全国卷Ⅲ第 21 题)

已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$,证明:当 $-1<x<0$ 时,$f(x)<0$;当 $x>0$ 时,$f(x)>0$.

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,求 a 的值.

大学视角

用泰勒展开式 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$ 得

$$f(x)=(2+x+ax^2)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)-2x$$

$$=\left(a+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{6}\right)x^4+\cdots \quad (1)$$

如果三次项系数 $a+\frac{1}{6}\neq 0$,在 0 附近足够小的区间 $(-d,d)$ 内,三次以上各项和绝对值比三次项小,$f(x)$ 的正负号与三次项 $(a+\frac{1}{6})x^3$ 相同,$f(x)$ 与 $f(-x)$ 异号,总有一个大于 0,$f(0)=0$ 不是极大值.

要使 $f(0)$ 极大,必须三次项系数 $a+\frac{1}{6}=0$,$a=-\frac{1}{6}$. 此时 $f(x)=-\frac{1}{12}x^4+\cdots$ 的最低次非零项是四次项 $-\frac{1}{12}x^4$. 在 0 附近足够小的区间内,$f(x)$ 的正负号与四次项 $-\frac{1}{12}x^4$ 相同,当 $x\neq 0$ 时都小于 0,$f(0)$ 确实是极大值.

一般地,设 $f(x)=f(c)+a_m(x-c)^m+a_{m+1}(x-c)^{m+1}+\cdots$ 是无穷级数且 $a_m\neq 0$ 是常数项之外最低次非零项的系数. 则当 $x\to c$ 时 $f(x)-f(c)=(x-c)^m[a_m+a_{m+1}(x-c)+\cdots]$,方括号内的 $\lambda(x)=a_m+a_{m+1}(x-c)+\cdots\to a_m$,在 c 附近足够小的区间 $(c-d,c+d)$ 内,$|x-c|$ 足够小,$\lambda(x)$ 足够接近 a_m,正负号与 a_m 相同. $f(x)-f(c)$ 与 m 次项 $a_m(x-c)^m$ 正负号相同.

当 m 是奇数,$x-c<0$ 与 $x-c>0$ 时 $f(x)-f(c)$ 的正负号相反,一正一负,$f(c)$ 既不是极大值也不是极小值.

当 m 是偶数,只要 $x-c\neq 0$ 都有 $(x-c)^m>0$. 当 $a_m<0$ 时都有 $f(x)-f(c)<0$,$f(c)$ 是极大值. 当 $a_m>0$ 时都有 $f(x)-f(c)>0$,$f(c)$ 是极小值.

中学生只要背熟了泰勒展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

就不难在草稿上完成以上解答,知道此题的正确答案. 他不能将这个解答写在高考试卷上,但既然知道了 $f(x)$ 展开式中的三次以下的项都等于 0,就知道 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一阶与二阶导数 $f'(0)=f''(0)=0$ 都等于 0. 也知道应该根据三阶导数 $f^{(3)}(0)=0$ 得到 $a=-\frac{1}{6}$,并且根据 0 附近的三阶导数 $f^{(3)}(x)<0$ 来论证 $f(0)$ 确实是极大值. 他已经胸有成竹,只需按照既定路线一步一步算导数达到预定目标. 别的考生也在一步一步算导数,却茫然不知前面的道路会遇到什么障碍,算出一阶和二阶导数都等于 0 就可能不知所措了.

中学解法

首先,$f(x)=0$.

(1) $a=0$,$h(x)=f'(x)=\ln(1+x)+\frac{2+x}{1+x}$

$-2=\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}-1.$

$h(0)=0,$

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}.$$

当 $x>0$，$h'(t)>0$ 对区间 $(0,x]$ 内所有 t 成立. $h(t)$ 在区间 $[0,x]$ 由 $h(0)=0$ 递增到 $h(x)=f'(x)>0$. 区间 $(0,x)$ 内所有 $f'(t)>0$. $f(t)$ 在区间 $[0,x]$ 内由 $f(0)$ 递增到 $f(x)>0$. 这证明了 $f(x)>0$ 对所有 $x>0$ 成立.

当 $-1<x<0$，$h'(t)<0$ 对区间 $[-1,0)$ 内所有 t 成立. $h(t)$ 由 $h(x)$ 单调递减到 $h(0)=0$，可知 $h(x)=f'(x)>0$.

这说明 $f'(t)>0$ 对区间 $[-1,0)$ 内所有 t 成立，$f(t)$ 在区间内单调递增到 $f(0)=0$，可知 $f(x)<0$ 对所有 $-1\leqslant x<0$ 成立.

(2) $f(x)$ 在定义域 $(-1,+\infty)$ 有任意阶导数. $f(0)$ 是极大值，就是说 0 附近某区间 $(-d,d)$ 内其它值 $f(x)<f(0)$ $(x\neq0)$.

当 $x<0$ 到 0，$f(x)$ 由 $<f(0)$ 到 $f(0)$ 递增，$f'(x)>0$，令 $x\to0$ 得 $f'(0)\geqslant0$. $x=0$ 到 $x>0$，$f(0)$ 到 $f(x)<f(0)$ 递减，$f'(x)<0$，令 $x\to0$ 得 $f'(0)\leqslant0$. 迫使 $f'(0)=0$，这是 $f(0)$ 是极大值的必要条件. $f'(x)$ 由正递减到 0 再递减到负，$f''(x)$ 都是负. 如下表：

x	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$
$f(x)$	$<f(0)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$<f(0)$
$f'(x)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$
$f''(x)$	$-$		$f''(0)$		$-$

$f'(0)=0$，且 $f''(x)<0$ 对 0 附近某区间内 $x\neq0$ 都成立，这是 $f(0)$ 为极大值的充分必要条件.

计算得

$$f'(x)=(1+2ax)\ln(1+x)+\frac{2+x+ax^2}{1+x}-2$$

$$=(1+2ax)\ln(1+x)+\frac{ax^2-x}{1+x}.$$

$f'(0)=0.$

$$f''(x)=2a\ln(1+x)+\frac{1+2ax}{1+x}+\frac{2ax-1}{1+x}-\frac{ax^2-x}{(1+x)^2}$$

$$=2a\ln(1+x)+\frac{(4a+1)x+ax^2}{(1+x)^2}.$$

$f''(0)=0.$

$f(0)$ 是极大值 $\Leftrightarrow$ 在 $x=0$ 左右附近有 $g(x)=f''(x)<0=g(0)$，这又要求 $g(0)$ 是极大值，必须 $g'(0)=0$.

$$g'(x)=\frac{2a}{1+x}+\frac{4a+1+2ax}{(1+x)^2}-\frac{2(4a+1)x+2ax^2}{(1+x)^3}.$$

$$\Leftrightarrow g'(0)=\frac{2a}{1}+\frac{4a+1}{1}+\frac{0}{1}=6a+1=0$$

$$\Leftrightarrow a=-\frac{1}{6}.$$

$$g'(x)=\frac{-\frac{1}{3}(1+x)^2+\frac{1}{3}(1-x)(1+x)-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2}{(1+x)^3}$$

$$=-\frac{x(4-x)}{(1+x)^3}=-x\lambda(x),\lambda(x)=\frac{4-x}{(1+x)^3}.$$

区间 $(-1,4)$ 内 $\lambda(x)>0$，$g'(x)=-x\lambda(x)$ 的正负号与 x 相反，在区间 $(-1,0)$ 内 $g'(x)>0$，区间 $(0,4)$ 内 $g'(x)<0$. $g(x)$ 在区间 $(-1,4)$ 递增到 $g(0)=0$ 再递减，当 $x\neq0$ 都有 $f''(x)=g(x)<0$，这与 $f'(x)=0$ 一起保证了 $f(0)$ 在 $(-1,4)$ 内是最大值，也是极大值.

第(2)小题解法2 当 $x\to0$，$2+x+ax^2\to2>0$. 0 附近足够小区间 $(-d,d)$ 内，$2+x+ax^2$ 足够接近 2，也有 $2+x+a^2>0$. $f(x)$ 在区间 $(-d,d)$ 内的正负号与

$$q(x)=\frac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x+ax^2}$$

相同. $f(0)$ 是极大值 $\Leftrightarrow q(0)$ 是极大值 $\Leftrightarrow$ 0 附近某区间 $(-h,0)$ 内

$$q'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x+ax^2)-2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x}-\frac{4-2ax^2}{(2+x+ax^2)^2}$$

$$=\frac{(2+x+ax^2)^2-(1+x)(4-2ax^2)}{(2+x+ax^2)^2}$$

$$=\frac{(6a+1)x^2+4ax^3+a^2x^4}{(2+x+ax^2)^2}>0$$

且在 $(0,h)$ 内 $q'(x)<0$. $\Leftrightarrow 6a+1=0, a=-\frac{1}{6}$.

此时 $q'(x)=\dfrac{-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{36}x^4}{\left(2+x-\frac{1}{6}x^2\right)^2}$ 符合要求，

$h(0)$与$f(0)$都是极大值.

答案：$a=-\frac{1}{6}$.

点评 解法2的优点是：先用除法将与$\ln(1+x)$相乘的$2+x+ax^2$剥离，只求一阶导数就把对数函数消去，化成分式. 容易判定$q'(x)$在$x=0$附近取值的正负号，不需要高阶导数，也不需要再求极限.

例2 （2012全国理科数学卷）已知函数$f(x)=\frac{a\ln x}{x+1}+\frac{b}{x}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$x+2y-3=0$.

（Ⅰ）求a,b的值.

（Ⅱ）当$x>0$且$x\neq1$时$f(x)>\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x}$. 求$k$的取值范围.

解 （Ⅰ）过点$(1,f(1))$的切线方程$x+2y-3=0$即$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

就是要求$f(1)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$,

$f'(1)=-\frac{1}{2}$.

对函数$f(x)$计算得$f(1)=b=1$,

$f'(1)=\frac{a}{2}-b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$.

（Ⅱ）题目要求当$x>0$且$x\neq1$时

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}+\frac{1}{x}>g(x)=\frac{\ln x}{x-1}+\frac{k}{x},$$

$$d(x)=f(x)-g(x)=\frac{-2\ln x}{x^2-1}+\frac{1-k}{x}>0,$$

令$h(x)=(x^2-1)d(x)=-2\ln x+(1-k)(x-\frac{1}{x})$.

则$h(1)=0$. $h'(x)=-\frac{2}{x}+(1-k)(1+\frac{1}{x^2})=(1-\frac{1}{x})^2-k(1+\frac{1}{x^2})$. $h'(1)=-2k$.

当$x>0$，$x\neq1$，由$x+1>0$，$d(x)>0$得

$$\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\frac{h(x)}{x-1}=(x+1)d(x)>0.$$

当$x\to1$时上式左边的极限为$h'(1)=-2k\geqslant0$，必须$k\leqslant0$.

设$k\leqslant0$，则$h'(x)=(1-\frac{1}{x})^2-k(1+\frac{1}{x^2})\geqslant0$. 当$x\neq1$，$h'(x)>0$.

当$x>1$，$h(1)=0$单调递增到$h(x)>0$，

$d(x)=\frac{h(x)}{x^2-1}>0$.

当$0<x<1$，$h(x)<0$单调递增到$h(1)=0$，

$d(x)=\frac{h(x)}{x^2-1}>0$.

k的取值范围为$(-\infty,0]$.

点评 本题解法与例1解法2如出一辙：$d(x)$乘x^2-1将$\frac{-2\ln x}{x^2-1}$的分母剥离，一次求导就消掉了对数函数，容易讨论函数的正负.

本题函数$d(x)$在$x=1$无意义，无法由$d(1)$的值和区间$(0,+\infty)$上的导数$d'(x)$判定区间各点的$d(x)$值. 乘x^2-1之后得到的$h(x)$在所有各点(包括$x=1$)都有函数值和导数值. 而且导数$h'(x)$不含对数函数. 将$h(x)$在各点的值判断清楚了，$d(x)$在$x\neq1$的各点的值也都清楚了.

借题发挥泰勒运算，求导实施

1. 举一反二. 具备了基础知识的考生都知道$f(0)$是极大值的一个必要条件是$f'(0)=0$. 常规考试题一般都有$f''(0)<0$来保证0附近左右两边的$f''(x)<0$，$f'(x)$左正右负，从而保证$f(0)$是极大值. 本题却故意让$f''(0)=0$来增大难度，把只会用现成方法的考生刷下去，帮助能够灵活运用现成方法的考生脱颖而出. 所谓“灵活运用现成方法”，当然不是让你用泰勒展开，也不是让你用洛必达法则，因为泰勒展开和洛必达法则都不是现成方法，而是新的知识和方法. 我不能猜测出题人希望你用哪一种现成方法. 我能想到的是：当$f''(0)=0$，如果二阶导数$g(x)=f''(x)$在$x=0$左右两边的取值$g(x)<0$都为负，$g(0)$又是极大值. 将$f(0)$取极值的条件$f'(0)=0$用到$g(x)$身上得到$g'(0)=0$，当$g''(0)<0$就得到$g(0)=0$是极大值，从而$f(0)$也是极大值. 这是将现成方法用两次，可以叫做举一反二，还不是举一反三.

2. 利用导数算极限. 可惜很多考生不会举一反三，也不会举一反二，能够依样画葫举一反

一就不错了. 他们分析出 $f(0)$ 是极大值的条件应该是 0 左右两边的二阶导数 $f''(x)$ 都为负，与 x 之比 $\mu(x)=\frac{f''(x)}{x}$ 左正右负，当 $x\to 0$ 时的极限 $\mu(x)\to\mu=0$. 这个想法不错. 问题在于怎么求极限 μ?

假如认识到当 $x\to 0$,

$$\mu(x)=\frac{f''(x)}{x}=\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}\to\mu=f'''(0)$$

的极限就是函数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的导数 $f'''(0)$，就不必费尽心机去求极限，只要套公式求 $f''(x)$ 的导数就行了.

假如你不懂三阶导数，或者怕使用了三阶导数被判为超纲而扣分. 那很好办：将二阶导数 $f''(x)$ 改个名字记为 $g(x)$，忘掉它是二阶导数，再求导数就变成一阶导数 $g'(0)$，而没有三阶导数了. 甚至如果你对二阶导数都感到害怕，可以将一阶导数 $f'(x)$ 记为 $h(x)$，二阶导数 $f''(x)=h'(x)$ 就变成一阶导数了. 不需要学习新知识，没有新困难.

唯一的困难是心理障碍. 就好比你学了数手指得出 $3+2=5$，只记住答案 5，遇到考题 $4+5$ 还只靠背得的答案写 $4+5=5$，而不会举一反二用与 $3+2$ 同样的方法数手指得出 $4+5=9$. 又如，书上写了零向量平行于任何向量，没有写垂直于任何向量，你就认为零向量不垂直于任何向量. 还把这个“心得”写成文章到处传播，或者在你主持的“培训班”宣讲. 如果高考问零向量是否垂直于向量 $\overrightarrow{OA}$，你就告状说考题超纲了，(就好比学了 $3+2$ 却考 $4+5$ 你就告状说超纲). 而不知道作 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OA}$，通过书上讲过的知识 $\mathbf{0}/\!/\overrightarrow{OB}$ 得出 $\mathbf{0}\perp\overrightarrow{OA}$. 直接用书上的现成公式做考题，这叫应试教育. 考题是书上没有的，但可以用书上的现成公式稍加变通举一反三或者举一反二做出来，这叫做素质教育，考的是核心素养. 只要书上讲过求一阶导数，考任何阶的导数都不是超纲，因为你可以把它变成一次又一次求一阶导数做出来.

3. 洛必达隐身避超纲

很多考生看不出当 $x\to 0$ 时

$$\mu(x)=\frac{f''(x)}{x}=2a\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{(4a+1)+ax}{(1+x)^2}\to\mu=0 \tag{2}$$

的极限 μ 是导数，非得要硬算这个极限. 就发现 $\mu(x)$ 后一部分的分式的极限可以将 $x=0$ 代入，直接算出 $\frac{4a+1+0}{(1+0)^2}=4a+1$. 前一部分的 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 不能直接算出. 很多中学老师教学生的方法就是用洛比达法则，分子分母求导来得出求这个极限：分子分母同时求导得到 $\frac{1}{1+x}$，再将 $x=0$ 代入得到极限 1. 有些地区的评卷考官就来限制这种做法，说是中学教材没有讲，超纲了，不准用，用了就要扣分. 中学老师愤愤不平：超纲是因为我们的老师和学生特别优秀，提前学了大学知识. 应该鼓励而不应该打击.

其实我很赞成中学老师这种观点：中学生提前学了大学知识，**只要用得正确**，就应该鼓励而不应该打击. 问题在于：第一，你用得正确吗？第二，既然人家见了“洛必达”三个字就要扣分，你难道就没有办法回避这三个字，换汤不换药，用中学教材上讲过的方法将极限求出来？

如果你真是“超纲”学会了大学微积分，这两个问题都迎刃而解.

第一，大学怎样求这个极限？不是用洛必达法则，而是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1,$$

用的是微分学两个基本极限之一：

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{3}$$

大学为什么要算 $\frac{\ln(1+x)}{x}$ 的极限？不是为了高考，而是为了推出求对数函数导数 $(\ln x)'$ 的公式：

$$(\ln x)'=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(x+t)-\ln x}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\frac{t}{x})}{t}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\frac{t}{x})}{\frac{t}{x}},$$

让 $x>0$ 固定不变，$t\to 0$，则 $\lambda=\frac{t}{x}\to 0$，上式最后的极限就变成

$$\frac{\ln\left(1+\frac{t}{x}\right)}{\frac{t}{x}}=\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}\to 1\Rightarrow(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

可见，极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$是推出导数公式$(\ln x)'=\frac{1}{x}$的中间步骤．利用基本极限(3)得出这个极限，再用它得出导数公式．其实它本身就是对数函数$f(x)=\ln x$在$x=1$的导数$f'(1)$的原始定义：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}=f'(1)$$

以上的运算过程是利用$\ln x$在$x=1$的导数1得出在x的导数$\frac{1}{x}$.

洛必达法则是用导数公式求极限．但是导数公式本身也是极限，谁来求这个极限呢？用更基本的极限来这个极限，推出导数公式．以上就是用关于e的基本极限(3)来推出对数的导数公式．如果再用洛必达法则来求，就是循环论证．洛必达法则可以求别的极限，却不能求推出自己这个导数公式那个极限．就好比父母生了儿子，儿子可以生孙子，但是儿子不能生父母．如果中学生真是超纲达到了大学水平，就知道这个极限$\frac{\ln(1+x)}{x}\to 1$不应该用洛必达法则计算，而应该用基本极限计算．所以，按照大学的标准，这不是超纲，而是循环论证，是儿子生父母．

高考考生不是大学生，不能按大学标准要求，而应该按中学要求．中学生应该怎样来求这个极限呢？中学教材没有讲e的基本极限，更没有讲洛必达法则，但是讲了导数公式，也讲了导数定义．就应该用导数定义和导数公式来求．高考中是否准许用洛必达法则，争吵了很多年，纠结的几乎都是这“两个”极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1},$$

$$f(x)=\ln x,$$

即使不按大学标准来讨论循环论证的问题，就按中学标准，只要你懂了什么叫导数，就应该看出这“两个极限”其实是同一回事，都是$\ln x$在$x=1$的导数的原始定义．将$x=1$代入导数公式$(\ln x)'=\frac{1}{x}$立即得到．你偏偏就看不出来．非得把一知半解的三个字“洛必达”抬出来作为“圣旨”．人家不准你用这条圣旨，要扣你的分，你还自以为是烈士虽扣犹荣．改卷人居然还给你颁发了个荣誉证书叫做“超纲”．假如我来评卷，照样扣你的分，但不会颁发荣誉证书，而是颁发一条罪状“不懂导数定义，没有达到中学教学要求”．当然，中学教材确实没有强调导数定义，其实也不怪中学生．但是高考考了很多次，你怎么对付？不要用有“洛必达”三个字的圣旨，换一条“导数定义”就行了．

其实，凡是可以用洛必达法则求极限的，通通都可以用导数定义来代替，洛必达三个字可以一律不用．例如，当$x\to 0$时$f(x)\to 0$，$f(x)$除以x的商的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

一般地，当$x\to c$两个函数$f(x),g(x)$都趋于0，它们的比的极限

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\frac{g(x)-g(c)}{x-c}}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

这就是用导数定义推出洛必达法则．为了避免超纲扣分，你不说它是洛必达法则，自己用导数定义重新推出来，不用洛必达之名，只用中学允许的知识，仍然将极限化成了导数．例如，当$x\to 1$时求极限

$$\frac{\ln x}{\sin \pi x}=\frac{\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}}{\frac{\sin \pi x-\sin \pi 1}{x-1}}\to\left.\frac{(\ln x)'}{(\sin \pi x)'}\right|_{x=1}$$

$$=\left.\frac{\frac{1}{x}}{\pi\cos \pi x}\right|_{x=1}=-\frac{1}{\pi}$$

虽然这样的题目难度超纲，但如果真的遇到了，以上解法只用了导数定义和导数公式，没有出现洛必达三个字，并没有超纲．　（未完待续）