《正态分布》怎能“一笔带过”

——《正态分布》的教学设计

华南师范大学数学科学学 (510631) 莫仕燊 李 碧

1733 年法国数学家狄莫弗首先发现正态曲线方程. 以后,高斯和拉普拉斯都各自发现了这条曲线方程,所以正态分布也称“高斯 — 拉普拉斯分布”. 正态分布是概率论中最重要的一种连续型分布,又是统计学的基石,因此具有独特的双重理论背景和应用价值.

1 教学现状

《正态分布》是人教版高中选修教材 2 - 3 中的内容,被安排在第二章“随机变量及其分布列” 中第 4 节,新课标要求“通过实际问题,借助直观(如实际问题的直方图),认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义”[1]. 这是相对较低的要求,因此在实际教学中,很多教师对于这一节的内容没有给予足够的重视,往往用一节课的时间把《正态分布》“一笔带过”,忽略很多关键环节.

2 考情分析

在广东高考中,考纲要求“利用实际问题的直方图,了解正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义”,对考生的要求是“了解”. 在历年广东高考中,几乎没有考查正态分布的相关知识内容. 但是,从全国的情况来看,从 2006 年起,正态分布的题目开始在湖北卷出现,引起了重视,之后在全国 II 卷及安徽、湖北、浙江等卷中分别出现,之后每年都有 4 或 5 份的高考试卷中出现这类题. 考查的形式都为选择题或者填空题,正态分布在每份卷中所占的分量往往为 1 道小题,5 分左右. 正态分布在高考的地位越来越重要.

3 设计意图

《正态分布》在实际教学中“一笔带过”,忽略很多关键环节. 同时,对于正态分布的教学设计,目前的研究更多是在理论指导方面,并没有给出具体可操作的教学设计. 有感于此,本文将依据循序渐进的教学原则,从概念的定义、性质再到应用,给出具体的可操作的教学设计,以供同行参考.

4 教学设计

4.1 基本情况

课时:1 课时;教学对象:高二(上) 学生

4.2 教材分析

通过前面离散型随机变量的学习,学生初步掌握了离散型随机变量及其分布列、均值和方差的计算,本节课将随机变量从离散型过渡到连续型,通过实际问题,认识正态分布曲线的特点及曲线所表示的意义.

4.3 教学目标

(一) 知识与技能目标:① 通过实际问题,借助频率分布直方图,认识正态分布曲线的特点;② 了解正态分布的概念;③ 利用正态曲线曲线所表示的意义和 3σ 原则,学会计算指定区间的概率.

(二) 过程与方法目标:通过正态分布的函数特征和几何性质,培养学生数形结合、函数思想、化归的数学思想方法.

(三) 情感态度与价值观目标:① 通过正态分布的函数特征和几何性质的引导,让学生形成乐于探究、积极主动的学习精神;② 通过解决原则的概率问题,让学生感受数学的对称美.

4.4 教学重难点分析

教学重点:正态分布曲线的特点及表示的意义,利用 3σ 原则计算指定区间的概率.

教学难点:正态分布的概念和正态曲线表示的意义.

4.5 教学方法与手段

教学方法:采用引导 — 探究的教学方法

教学手段:PPT、“高尔顿板随机试验” 软件、几何画板

4.6 教学过程

(1) 正态分布密度曲线的引入

师:在前面,我们学习的都是离散型的随机变量,它的概率分布规律,用分布列来描述,而连续型随机变量的概率分布规律用分布密度函数曲线描述.

我们先来看一个模拟试验:从上面放一小球,让它自由落下. 在下落的过程中当小球碰到小木板时从左边落下与从右边落下的机会相等,碰到下一个小木板又是如此,最后落入底板中的某一格子. 这样,任意放入一个球,这个球落入哪一个格子是一个随机事件. 我们想一想,球落在哪个位置是最多的呢?

生 1:最中间那个格子.

生 2:不一定中间,有可能一样多.

师:我先做 500 次试验,看看结果怎么样?(实验过后) 问:哪个位置的球最多?

生 3:落在中间位置的球比较多,“中间高,两头低”.

师:这就是高尔顿板随机试验. 正如,要生产一包 10kg 的大米,需要经过很多程序和步骤,每一个步骤都会受到许多微小的独立随机因素的影响(这些小木块就是随机影响因素),那么质量的分布就像刚刚的试验结果. 集中在 10kg 附近,误差特别大的在“两头”,数量特别地少.

师:如果以球槽的编号为横坐标,以小球落入各个球槽内的频率值为纵坐标,可以画出频率分布直方图. 注意:纵坐标是频率除以组距. 这样做我们可以有什么结果啊?

生 3:各个小长方形的面积表示相应各组的频率,可以用频率来估计发生的概率.

师:如果将组距不断缩小,最终会越来越像一条钟形曲线. 这近似于正态分布密度曲线, 对应的函数解析式

$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

(意图:揭示正态分布曲线的由来,教师不能“一笔带过”,要结合具体的实例,如产品的质量,来说明高尔顿版模拟实验.)

(2) 正态分布密度曲线的含义

求随机变量 X 落在区间 (a,b) 上的概率,跟频率分布直方图相似,阴影部分的面积就是所要求的概率. 计算公式:$P(a < X \le b) = \int_a^b \varphi_{\mu,\sigma}(x)dx$,它表示的意义:过点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 的两条 x 轴的垂线,及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(3) 给出正态分布的概念

师:在我们的生活当中,有很多正态分布的具体例子,经验表明,一个随机变量如果是众多的、互不相干的、不分主次的偶然因素作用结果之和,它就服从或者近似服从正态分布. 想想刚刚的高尔顿随机试验,经过若干次碰撞,也就是经过许多偶然因素的作用后,最终的结果就近似于一个正态分布了. 有没有同学可以举出服从正态分布的例子呢?

生 1:一些产品的质量或者长度,比如大米的重量.

生 2:我们班的数学成绩.

生 3:广州的年降水量.

师:那再看看这样的例子是否服从正态分布?奥数尖子班的高考数学成绩,沙漠每年 7 月份的降雨量?

生 4:应该不是.

师:为什么呀?难道它们受到的影响因素不是“众多的、互相独立的、不分主次的”?

生 5:奥数班的数学成绩肯定很高,沙漠几乎不降雨.

师:对,因为奥数班的数学成绩受他们自身智力影响过大,沙漠受到的影响因素主要是气候,决定了它几乎不降雨. 像这种受到了某个影响因素过大的例子,一般不服从正态分布.

(意图:通过给出正例和反例,加强学生对概念的理解. 教师不能“一笔带过”,只讲正例.)

(4) 正态曲线的性质

师:曲线位于 x 轴上方,与 x 轴不相交,,有谁能说明原因呢?

生 1:$\sigma > 0$,所以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} > 0$,而 $e^t > 0$,$t \in R$,这里 $t = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$.

师:曲线是单峰的,它关于直线 $x = \mu$ 对称,如何利用数学的语言来说明呢?

生 2:单峰,即最大值只有一个,关于直线 $x = \mu$ 对称,证明 $\varphi(\mu + x) = \varphi(\mu - x)$.

师:$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 是复合函数,由“同增异减”的单调性规律可知,$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 在 $x \in (-\infty, \mu)$ 上单调递增,在 $x \in (\mu, +\infty)$ 上单调递减,故 $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 在 $x = \mu$ 处取得最大值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

师:曲线与 x 轴之间的面积为 1,怎么说明呢?

生 3:随机变量 X 落在区间 $(-\infty, +\infty)$ 是一个必然事件,必然事件的概率为 1.

师:(利用几何画板)类似于物理上所说的控制变量法,先固定 σ 的值,让它保持不变. 当 μ 变大或者变小的时候,会出现什么情况?可以得出什么结论?

生 1:μ 是正数,向右平移,μ 是负数,向左平移.

师:再看,固定 μ 值不变,σ 越小,曲线越“瘦高”,σ 越大,曲线越“矮胖”. 这是为什么呢?

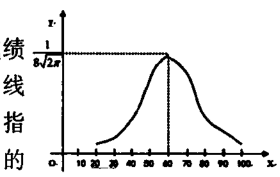
生 2:最大值 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$,$\sigma$ 越小 $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 越大,所以就高.

生 3:曲线与 x 轴之间的面积只能是 1,因而“瘦”.

师:其实,参数 μ 是反映随机变量取值的平均水平,可以认为是均值,参数 σ 是衡量随机变量总体的波动水平,可以认为是标准差.

(意图:发现学习是指自己去获取知识,包括提出假设和验证假设,教学中引导学生主动探索. 教师不能“一笔带过”,只让学生停留在观察图像的角度,要从函数的性质角度说明正态曲线的特征.)

(5) 正态分布的相关计算



例题:某地区数学考试的成绩 X 服从正态分布,其密度函数曲线图形如图,解决以下问题:(1) 指出 μ 和 σ;(2) 计算 $P(X = 60)$ 的值;(3) 计算成绩 X 位于区间 $(52,68]$ 的概率,即 $P(52 < X \le 68)$ 的值;(4) 计算 $P(60 \le X \le 76)$ 的值;(5) 若 $P(40 < X \le 50) = a$,求 $P(70 \le X \le 80)$ 的值;(6) 计算 $P(X \ge 84)$ 的值. (答案:60,8;0;0.6826;0.4772;a;0.0013)

(意图:只使用一个例题背景,配套若干变式小题来练习. 一来减少学生理解题意花费的时间,二来通过变式让学生更加灵活特殊区间的概率计算.)

4.7 板书设计、小结、作业省略

5 教学反思

《正态分布》涉及的知识点比较多,尤其是正态分布的概念和性质,如果“一笔带过”,往往不能把概念的本质讲透,更不能从函数的角度解释正态曲线的相关性质.

正态曲线的引入是从高尔顿板随机试验开始的,这部分需要的时间长一些,教师要把握紧一些,否则在讲解“3σ 原则”计算概率问题时会很仓促. 利用几何画板进行正态曲线的平移伸缩变换,能吸引学生的注意力,能取得较好的课堂效果. 可是,教师需要特别注意,学生注意力加强了,也不一定是真的完全学会,教师还需从函数的性质的角度来解释平移伸缩变换.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验)[M]. 北京师范大学出版社,2004.

[2] 何小亚,姚静. 中学数学教学设计[M]. 北京:科学出版社,2008.

[3] Ronald E. Walpole 等著,周勇等译. 理工科概率统计(第八版)[M]. 北京:机械工业出版社,2010.