江苏省仪征中学2020届高三（上）期中考试热身练习6

班级________ 姓名________ 学号________ 评价________

一、填空题：

1. 设集合 $A=\{x|x>0\}$,$B=\{x|-1<x\leq 2\}$,则 $A\cap B=$________.

2. 若复数 $z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}$(其中 i 是虚数单位),则复数 z 的共轭复数为________.

3. 命题“$\forall x\geq 2,x^2\geq 4$”的否定是“________,$x^2<4$”.

4. 已知向量 $a=(2,1)$,$b=(1,-1)$,若 $a-b$ 与 $ma+b$ 垂直,则实数 m 的值为________.

5. 设不等式$\begin{cases}x\geq 1,\\ x-y\leq 0,\\ x+y\leq 4\end{cases}$表示的平面区域为 M,若直线 $y=kx-2$ 上存在 M 内的点,则实数 k 的取值范围为________.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x-3,x>0,\\ g(x),x<0\end{cases}$是奇函数,则 $f(g(-2))=$________.

7. 设 $f(x)=\sin^2x-\sqrt{3}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,则 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调增区间为________.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $2x+y=0$ 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线,则该双曲线的离心率为________.

9. 在$\triangle ABC$ 中,若$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$,则$\frac{\sin A}{\sin C}$的值为________.

10. 已知两曲线 $f(x)=2\sin x$,$g(x)=a\cos x$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$相交于点 P.若两曲线在点 P 处的切线互相垂直,则实数 a 的值为________.

11. 已知函数 $f(x)=|x|+|x-4|$,则不等式 $f(x^2+2)>f(x)$的解集用区间表示为________.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知 B,C 为圆 $x^2+y^2=4$ 上两点,点 $A(1,1)$,且 $AB\perp AC$,则线段 BC 的长的取值范围为________.

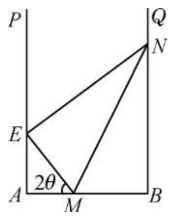
二、解答题：

13.在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$\sin A+\cos^2\frac{B+C}{2}=1$,$D$为$BC$上一点,且$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

(1) 求$\sin A$的值;　　　　　　　　(2) 若$a=4\sqrt{2}$,$b=5$,求AD的长.

14.某地拟在一个U形水面$PABQ$(角A和角B为直角)上修一条堤坝EN(E在AP上,N在BQ上),围出一个封闭区域$EABN$,用以种植水生植物.为美观起见,决定从AB上点M处分别向点E,N拉2条分隔线ME,MN将所围区域分成3个部分(如图),每部分种植不同的水生植物.已知$AB=a$,$EM=BM$,$\angle MEN=\frac{\pi}{2}$,设所拉分隔线总长度为l.

(1) 设$\angle AME=2\theta$,求用θ表示l的函数表达式,并写出定义域;　　(2) 求l的最小值.



15.已知椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,动直线 l 与椭圆交于 B,C 两点(点 B 在第一象限).

(1) 若点 B 的坐标为$\left(1,\frac{3}{2}\right)$,求$\triangle OBC$ 面积的最大值;

(2) 设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,且 $3y_1+y_2=0$,求当$\triangle OBC$ 面积最大时,直线 l 的方程.

三、附加题：

16. 已知变换 T 将平面上的点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$,(0,1)分别变换成点$\left(\frac{9}{4},-2\right)$,$\left(-\frac{3}{2},4\right)$.设变换 T 对应的矩阵为 M.

(1) 求矩阵 M;

(2) 求矩阵 M 的特征值.

17. 某小区停车场的收费标准为:每车每次停车时间不超过 2 h 免费,超过 2 h 的部分每小时收费 1 元(不足 1 h 的部分按 1 h 计算).现有甲、乙两人独立来该停车场停车(各停车一次),且两人停车时间均不超过 5 h.设甲、乙两人停车时间(单位:h)与取车概率如下表所示.

停车时间 取车概率 停车人员	(0,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]
甲	$\frac{1}{2}$	x	x	x
乙	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	y	0

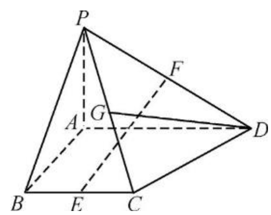
(1) 求甲、乙两人所付停车费相同的概率;

(2) 设甲、乙两人所付的停车费之和为随机变量 ζ,求 ζ 的分布列与数学期望 $E(\zeta)$.

18. 如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 为直角梯形,$AD/\!/BC$,$\angle BAD=\angle CBA=90°$,$PA=AB=BC=1$,$AD=2$,$E,F,G$ 分别为 BC,PD,PC 的中点.

(1) 求异面直线 EF 与 DG 所成角的余弦值.

(2) 若 M 为 EF 上一点,N 为 DG 上一点,是否存在 MN,使得 $MN\perp$ 平面 PBC?若存在,求出点 M,N 的坐标;若不存在,请说明理由.



江苏省仪征中学2020届高三（上）期中考试热身练习6答案

一、填空题：

1. $(0,2]$ 【解析】$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}=(0,2]$.

2. 1-i 【解析】因为 $z=\frac{2}{1-i}=1+i$,所以$\bar{z}=1-i$.

3. $\exists x\geq 2$

4. $\frac{1}{4}$ 【解析】由$(a-b)(ma+b)=0$,得 $ma^2+(1-m)a\cdot b-b^2=0$,即 $5m+(1-m)-2=0$,解得 $m=\frac{1}{4}$.

5. $[2,5]$ 【解析】作出平面区域 M 如图中阴影部分所示.因为直线 $y=kx-2$ 过定点$(0,-2)$,当直线过角点$(2,2)$与$(1,3)$时,斜率 k 分别取得最小值 2 和最大值 5,从而得 k 的取值范围是$[2,5]$.

6. 1 【解析】因为 $f(x)$为奇函数,且 $x>0$ 时,$f(x)=2^x-3$,所以 $x<0$ 时,$f(x)=g(x)=-(2^{-x}-3)$,所以 $g(-2)=-1$,所以 $f(g(-2))=f(-1)=-f(1)=1$.(本题可由 $f(g(-2))=f(f(-2))=-f(f(2))=-f(1)=1$ 求得)

7. $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 【解析】化简,$f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$,当 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbb{Z}$,即 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leq x\leq k\pi+\frac{\pi}{3}$,$k\in\mathbb{Z}$ 时,$f(x)$单调递增,所以 $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调增区间是$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

8. $\sqrt{5}$ 【解析】依题意知$\frac{b}{a}=2$,离心率 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$.

9. $\sqrt{2}$ 【解析】由已知,设ΔABC 中角 A,B,C 对应的边分别为 a,b,c,则 $ac\cos B+2bc\cos A=ba\cos C$.由余弦定理,整理得 $a=\sqrt{2}c$,所以$\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}=\sqrt{2}$.

10. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【解析】设点 P 的横坐标为 x_0,则 $f(x_0)=g(x_0)$,$f'(x_0)\cdot g'(x_0)=-1$,即 $2\sin x_0=a\cos x_0$,$2\cos x_0\cdot(-a\sin x_0)=-1$,所以 $\sin^2x_0=\frac{1}{4}$.因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin x_0=\frac{1}{2}$,$x_0=\frac{\pi}{6}$,所以 $a=\frac{2\sin x_0}{\cos x_0}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11. $(-\infty,-2)\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 【解析】作出函数 $f(x)$的图象如图所示,由 $f(x)$的图象及 $x^2+2>x$,知原不等式等价于$\begin{cases}x\geq 0,\\x^2+2>4\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\x^2+2>4,\\f(x)<f(x^2+2),\end{cases}$解得 $x>\sqrt{2}$或 $x<-2$,所以原不等式的解集是$(-\infty,-2)\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

12. $[\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}]$ 【解析】如图,取 BC 的中点 M,设 $M(x,y)$,由 $AM=\frac{1}{2}BC=\sqrt{OB^2-OM^2}$,知 $AM^2+OM^2=4$,所以$(x-1)^2+(y-1)^2+x^2+y^2=4$,整理得$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$,所以点 M 在以$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$为圆心,$\frac{\sqrt{6}}{2}$为半径的圆上,所以 $AM\in\left[\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,所以 $BC\in[\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}]$

二、解答题:

13. (1) 因为 $\sin A+\cos^2\frac{B+C}{2}=1$,所以 $\sin A+\frac{1+\cos(B+C)}{2}=1$,即 $2\sin A-\cos A=1$, (2 分)

所以$(2\sin A-1)^2=\cos^2A$,即 $5\sin^2A-4\sin A=0$. (4 分)

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A>0$,所以 $\sin A=\frac{4}{5}$. (6 分)

(2) 由(1)易知 $\cos A=\frac{3}{5}$,在$\triangle ABC$ 中,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

所以 $32=25+c^2-2\times5c\times\frac{3}{5}$,即 $c^2-6c-7=0$,解得 $c=7$. (10 分)

因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{8}bc\cos A=\frac{49}{16}+\frac{9}{16}\times25+\frac{3}{8}\times7\times5\times\frac{3}{5}=25$, (12 分)

所以 $AD=5$. (14 分)

14. (1) 因为 $EM=BM,\angle B=\angle MEN$,所以$\triangle BMN\cong\triangle EMN$,所以$\angle BNM=\angle MNE$.

因为$\angle AME=2\theta$,所以$\angle BNM=\angle MNE=\theta$. (2 分)

设 $MN=x$.因为在$\triangle BMN$ 中,$BM=x\sin\theta$,所以 $EM=BM=x\sin\theta$, (4 分)

所以在$\triangle EAM$ 中,$AM=EM\cos2\theta=x\sin\theta\cos2\theta$.

因为 $AM+BM=a$,所以 $x\sin\theta\cos2\theta+x\sin\theta=a$,$x=\frac{a}{\sin\theta\cos2\theta+\sin\theta}$, (6 分)

所以 $l=EM+MN=\frac{a(1+\sin\theta)}{\sin\theta(1+\cos2\theta)}=\frac{a(1+\sin\theta)}{\sin\theta\cdot2\cos^2\theta}=\frac{a(1+\sin\theta)}{2\sin\theta(1-\sin^2\theta)}=\frac{a}{2\sin\theta(1-\sin\theta)}$,其中 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. (8 分)

(2) 令 $f(\theta)=\sin\theta(1-\sin\theta)$,$\sin\theta\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以 $f(\theta)\le\frac{1}{4}$,当且仅当 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{6}$时取得最大值$\frac{1}{4}$, (12 分)
此时 $l_{\min}=2a$. (14 分)

15. (1) 由题知直线 OB 的方程为 $y=\frac{3}{2}x$,即 $3x-2y=0$.

设过点 C 且平行于 OB 的直线 l'的方程为 $y=\frac{3}{2}x+b$,(2 分)

则当 l'与椭圆只有一个公共点时,$\triangle OBC$ 的面积最大.

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{3}{2}x+b,\end{cases}$消去 y,整理得 $3x^2+3bx+b^2-3=0$, (4 分)

此时 $\Delta=9b^2-12(b^2-3)$,令 $\Delta=0$,解得 $b=\pm2\sqrt{3}$.当 $b=2\sqrt{3}$时,$C\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;当 $b=-2\sqrt{3}$时,$C\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (6 分)

所以$\triangle OBC$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times\sqrt{1+\frac{9}{4}}\times\frac{|3\sqrt{3}+\sqrt{3}|}{\sqrt{13}}=\sqrt{3}$. (8 分)

(2) 显然,直线 l 与 y 轴不垂直,设直线 l 的方程为 $x=my+n$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ x=my+n,\end{cases}$消去 x,整理得$(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$,

所以$\begin{cases}y_1+y_2=-\frac{6nm}{3m^2+4},\\ y_1y_2=\frac{3n^2-12}{3m^2+4}.\end{cases}$因为 $3y_1+y_2=0$,所以$\begin{cases}y_1=\frac{3nm}{3m^2+4},\\ y_1^2=\frac{4-n^2}{3m^2+4},\end{cases}$

从而$\frac{9n^2m^2}{(3m^2+4)^2}=\frac{4-n^2}{3m^2+4}$,即 $n^2=\frac{3m^2+4}{3m^2+1}$, (10 分)

所以 $S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}|n|\cdot|y_1-y_2|=2|n|\cdot|y_1|=\frac{6|m|n^2}{3m^2+4}=\frac{6|m|}{3m^2+1}$. (12 分)

因为 B 在第一象限,所以 $x_1=my_1+n=\frac{3m^2n}{3m^2+4}+n>0$,所以 $n>0$.

因为 $y_1>0$,所以 $m>0$,所以 $S_{\triangle OBC}=\frac{6m}{3m^2+1}=\frac{6}{3m+\frac{1}{m}}\leq\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$,

当且仅当 $3m=\frac{1}{m}$,即 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$时取等号, (14 分)

此时 $n=\frac{\sqrt{10}}{2}$,所以直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{\sqrt{10}}{2}$,即 $y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{30}}{2}$. (16 分)

三、附加题:

22. (1) 设 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,即$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\\ -2\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ 4\end{bmatrix}$, (2 分)

解得 $a=3,b=-\frac{3}{2},c=-4,d=4$, (4 分)

所以 $M=\begin{bmatrix}3 & -\frac{3}{2}\\ -4 & 4\end{bmatrix}$. (6 分)

(2) 设矩阵 M 的特征多项式为 $f(\lambda)$,

所以 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & \frac{3}{2}\\ 4 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-4)-6=\lambda^2-7\lambda+6$, (8 分)

令 $f(\lambda)=0$,则 $\lambda_1=1,\lambda_2=6$.所以矩阵 M 的特征值为 1 和 6. (10 分)

23. (1) 由题意得$\frac{1}{2}+3x=1$,所以 $x=\frac{1}{6}$,又$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+y=1$,所以 $y=\frac{1}{2}$. (2 分)

记“甲、乙两人所付的停车费相同”为事件 A,则 $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$,

所以甲、乙两人所付停车费相同的概率为$\frac{2}{9}$. (4 分)

(2) 设甲、乙两人所付的停车费用之和为 ζ,ζ 可能取得的值为 0,1,2,3,4,5,

$P(\zeta=0)=\frac{1}{12}$,$P(\zeta=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{36}$,$P(\zeta=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,$P(\zeta=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$,$P(\zeta=4)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$,$P(\zeta=5)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$.

所以 ζ 的概率分布如下表:

ζ	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$

(8 分)

所以 $E(\zeta)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{7}{36}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{5}{36}+5\times\frac{1}{12}=\frac{7}{3}$. (10 分)

24. (1) 以 A 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,1,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,1)$.

因为 E,F,G 分别为 BC,PD,PC 的中点,所以 $E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,$F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$G\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

所以$\overrightarrow{EF}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{DG}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DG}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=-1$, (2 分)

所以 $\cos<\overrightarrow{EF},\overrightarrow{DG}>=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DG}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DG}|}=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}}=-\frac{2}{33}\sqrt{66}$, 即 EF 与 DG 所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{66}}{33}$. (4 分)

(2) 设平面 PBC 的法向量为 $n=(x,y,z)$,因为$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$,

由于 $n\perp\overrightarrow{BC}$,$n\perp\overrightarrow{PB}$,所以$\begin{cases}y=0,\\x-z=0,\end{cases}$令 $x=1$,所以 $n=(1,0,1)$, (6 分)

则$\overrightarrow{MN}$ // n.设 $M(x_1,y_1,z_1)$,$N(x_2,y_2,z_2)$, 所以$\begin{cases}x_2-x_1=z_2-z_1,\\y_2-y_1=0.\end{cases}$ ①因为 M,N 分别是线段 EF,DG 上的点,

所以$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{DN}=t\overrightarrow{DG}$,$\lambda\in$R,$t\in$R.因为$\overrightarrow{EM}=\left(x_1-1,y_1-\frac{1}{2},z_1\right)$,所以$\overrightarrow{DN}=(x_2,y_2-2,z_2)$,

所以$\begin{cases}x_1-1=-\lambda,\\y_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lambda,\\z_1=\frac{1}{2}\lambda,\end{cases}$且$\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}t,\\y_2-2=-\frac{3}{2}t,\\z_2=\frac{1}{2}t,\end{cases}$ (8 分)

所以 $y_2-y_1=-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{2}$,$x_2-x_1=\frac{1}{2}t+\lambda-1$,$z_2-z_1=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\lambda$,

将上式代入①,得$\begin{cases}-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\lambda+\frac{3}{2}=0,\\\frac{1}{2}t+\lambda-1=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3},\\t=\frac{7}{9},\end{cases}$

所以点 M,N 的坐标分别为 $M\left(\frac{1}{3},\frac{5}{6},\frac{1}{3}\right)$,$N\left(\frac{7}{18},\frac{5}{6},\frac{7}{18}\right)$. (10 分)