2021年普通高等学校招生全国统一考试·新高考模拟卷(四)

数　学

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|-2<x<3\}$,集合 $B=\{x|x>a\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,则实数 a 的取值范围为 (　　)

A. $[-2,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $(-\infty,-2]$　　D. $(-\infty,3]$

2. 若 $z=(m^2-4)+(m+2)\mathrm{i}$ 为纯虚数,则实数 m 的值为(　　)

A. 0　　B. -2　　C. 2　　D. ± 2

3. 设 $a\in\mathbf{R}$,则"$a=1$"是"直线 $x+ay+1=2$ 与 $x-ay-3=0$ 垂直"的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. "净拣棉花弹细,相合共雇王嫞.九斤十二是张昌,李德五斤四两.纺讫织成布匹,一百八尺曾量.两家分布要明彰,莫使些儿偏向."这首古算诗题出自《算法统宗》中的《棉布均摊》,它的意思如下:张昌拣棉花九斤十二两,李德拣棉花五斤四两(古代一斤十六两).共同雇王嫞来帮忙细弹、纺线、织布.共织成布匹一百零八尺长,则张昌应分配 (　　)

A. 70.2 尺　　B. 37.8 尺　　C. 62.8 尺　　D. 45.2 尺

5. 在△ABC 中内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $a^2\cos A\sin B=b^2\cos B\sin A$,则△$ABC$ 的形状为 (　　)

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等腰三角形或直角三角形

6. 曲线 $y=\mathrm{e}^x+x$ 在 $x=0$ 处的切线与曲线 $y=x^2+2m$ 相切,则实数 $m=$ (　　)

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

7. 已知在平面直角坐标系 xOy 中,$A(-1,0)$,$B(0,\sqrt{3})$,$C(2,0)$,$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}(m\in\mathbf{R})$,$|CQ|=\sqrt{3}$,则 $|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|$ 的最小值为 (　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,x>0\\ x+2,x\leqslant 0\end{cases}$,若函数 $y=f(x)-a$ 有 3 个零点分别为 x_1,x_2,x_3,则 $2^{x_1x_2x_3}$ 的取值范围为 (　　)

A. $[1,4)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},1\right]$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $\left(\dfrac{1}{4},1\right]$

二、选择题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 3 分.

9. 已知实数 x,y 满足 $a^x<a^y(a>1)$,则下列关系式不正确的有 (　　)

A. $\dfrac{1}{x^2+1}<\dfrac{1}{y^2+1}$　　B. $\ln(x^2+1)>\ln(y^2+1)$

C. $\sin x>\sin y$　　D. $x^3<y^3$

10. 佩香囊是端午节传统习俗之一，香囊内通常填充一些中草药，有清香、驱虫、开窍的功效. 因地方习俗的差异，香囊常用丝布做成各种不同的形状，形形色色，玲珑夺目. 图 1 的$\square ABCD$由六个正三角形构成，将它沿虚线折起来，可得图 2 所示的六面体形状的香囊，若 $AD=3$，则在图 2 这个六面体中（　　）

A. $AB/\!/CD$　　　B. $AB\perp CD$

C. 六面体的表面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. 六面体的体积为$\frac{\sqrt{2}}{6}$

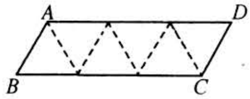


图 1

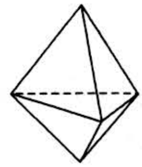


图 2

11. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)-\cos(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到函数 $g(x)$的图象，若$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$是函数 $g(x)$的一个对称中心，则函数 $g(x)$在下列哪个区间上单调递减（　　）

A. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$

12. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 是椭圆上一点，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，$|\overrightarrow{PF_1}|=\lambda|\overrightarrow{PF_2}|(\frac{1}{3}\leqslant\lambda\leqslant 3)$，则椭圆离心率的取值可能为（　　）

A. $\frac{\sqrt{33}}{8}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

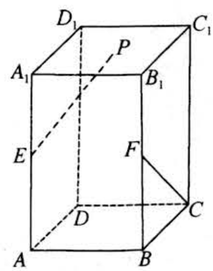
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(2x-1)(x-1)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为________.（用数字作答）

14. 若$\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{1}{2}$，则 $\tan x=$________.

15. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 的直线与双曲线 C 的左、右两支分别交于 A,B 两点，若$|AB|=8$，$|AF_2|=|BF_2|$，则焦点 F_2 到直线 AB 的距离为________.

16. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，$AA_1=2$，$AD=\sqrt{2}$，E、F 分别为棱 AA_1、BB_1 的中点. 动点 P 在长方体的表面上，且 $EP\perp CF$，则点 P 的轨迹的长度为________.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c.

(1) 证明：$a\cos B+b\cos A=c$；

(2) 在①$\frac{2c-b}{\cos B}=\frac{a}{\cos A}$，②$c\cos A=2b\cos A-a\cos C$，③$2a-\frac{b\cos C}{\cos A}=\frac{c\cos B}{\cos A}$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答：

若 $a=7$，$b=5$，________，求△ABC 的周长.

解：(1) 根据余弦定理：$a\cos B+b\cos A=a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\frac{a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2}{2c}=c$，所以 $a\cos B+b\cos A=c$. ………………………………………… 4 分

(2) 选①：因为$\frac{2c-b}{\cos B}=\frac{a}{\cos A}$，所以 $2c\cdot\cos A=b\cos A+a\cos B$，

所以由(1)中所证结论可知，$2c\cos A=c$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；……………… 7 分

选②：因为 $c\cos A=2b\cos A-a\cos C$，所以 $2b\cos A=a\cos C+c\cos A$，
由(1)中的证明过程同理可得，$a\cos C+c\cos A=b$，

所以 $2b\cos A=b$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；………………………………………… 7 分

选③：因为 $2a-b\cdot\frac{\cos C}{\cos A}=c\cdot\frac{\cos B}{\cos A}$，所以 $2a\cos A=b\cos C+c\cos B$，
由(1)中的证明过程同理可得，$b\cos C+c\cos B=a$，

所以 $2a\cos A=a$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 7 分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理知，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+c^2-10c\cdot\frac{1}{2}=49$，

即 $c^2-5c-24=0$，解得 $c=8$ 或 $c=-3$(舍)，所以 $a+b+c=7+5+8=20$，即$\triangle ABC$的周长为20. …… 10 分

18. 各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $4S_n=(a_n+1)^2$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{a_n}{2^{n-1}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

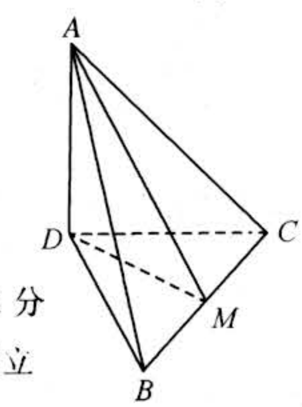
解(1)$\because 4S_n=(a_n+1)^2$，$\therefore$当 $n=1$ 时，$4S_1=4a_1=(a_1+1)^2$，$\therefore a_1=1$. ………………………………… 2 分
当 $n\geqslant 2$ 时，$4S_n=(a_n+1)^2$，$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$，两式相减得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$. ……………… 4 分
$\because a_n>0$，$\therefore a_n+a_{n-1}>0$，$\therefore a_n-a_{n-1}=2$，
$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，$\therefore a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$；………………………… 6 分

(2)由(1)知 $b_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，$T_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，① $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，② ………………………………………… 8 分

①－②，得 $\frac{1}{2}T_n=1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+2\times\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+2-\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$，　$\therefore T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$. ………… 12 分

19. 如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$AD\perp$底面 BCD，底面 BCD 是等边三角形，$AD=BD$，M 为 BC 中点.



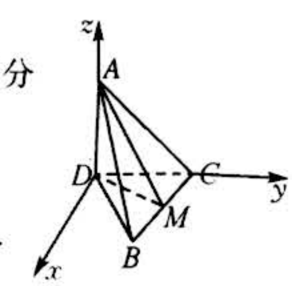
(1)证明：平面 $ABC\perp$平面 ADM；

(2)求二面角 $C-AB-D$ 的余弦值.

解：(1)$\because AD\perp$平面 BCD，$BC\subset$平面 BCD，$\therefore AD\perp BC$.
$\because DC=DB$，M 为 BC 中点，$\therefore DM\perp BC$，又 $AD\cap DM=D$，且 $AD,DM\subset$平面 ADM，
$\therefore BC\perp$平面 ADM.　$\because BC\subset$平面 ABC，$\therefore$平面 $ABC\perp$平面 ADM. …………………… 4 分

(2)在平面 BCD 内以垂直于 DC 的直线为 x 轴，以 DC,DA 所在直线为 y 轴，z 轴建立如图空间直角坐标系，

不妨设 $AD=1$，则 $BD=BC=CD=AD=1$，



$\therefore A(0,0,1)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,0)$，………………………………………… 5 分

设平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}z=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},0)$，……………… 7 分

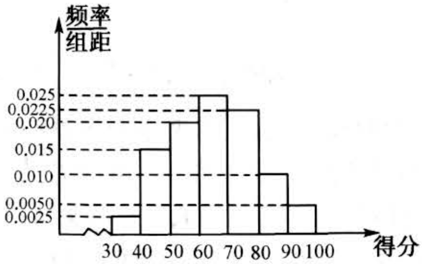
设平面 ABC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x',y',z')$，得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y'-z'=0\\ y'-z'=0\end{cases}$，令 $z'=1$，

得 $\boldsymbol{n}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,1\right)$ ……………………………………………………………………………… 9 分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{21}}{3}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$. ………………………………………………………… 11 分

由图知二面角 $C-AB-D$ 为锐角，$\therefore$二面角 $C-AB-D$ 的余弦值是 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………… 12 分

20. 推进垃圾分类，是落实绿色发展理念的必然选择，也是打赢污染防治攻坚战的重要环节. 为了了解居民对垃圾分类的了解程度，某社区居委会随机抽取 1000 名社区居民参与问卷测试，并将问卷得分绘制频率分布直方图如图：



(1)已知此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu,210)$，μ 近似为这 1000 人得分的平均值(同一组中的数据用该组区间的中点值为代表)，请利用正态分布的知识求 $P(50.5<Z\leqslant 94)$；

(2)在(1)的条件下，社区居委会为此次参加问卷调查的社区居民制定如下奖励方案.

(ⅰ)得分不低于 μ 的可以获赠 2 次随机优惠券，得分低于 μ 的可以获赠 1 次随机优惠券；

(ⅱ)每次赠送的随机优惠券和相应的概率如下表.

赠送的随机优惠券/元	20	40
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

现社区居民要参加此次问卷调查，记 X 为该社区居民参加问卷调查获赠的优惠券金额，求 X 的分布列及数学期望.

附：$\sqrt{210}\approx 14.5$，若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9973$.

解：(1)由题意可得 $\mu=\frac{35\times25+45\times150+55\times200+65\times250+75\times225+85\times100+95\times50}{1000}=65$，…… 3 分

易知 $\sigma=\sqrt{210}\approx14.5$，$\therefore 50.5=65-14.5=\mu-\sigma$，$94=65+2\times14.5=\mu+2\sigma$，

$\therefore P(50.5<Z\leqslant94)=P(\mu-\sigma<Z\leqslant\mu+\sigma)+P(\mu+\sigma<Z\leqslant\mu+2\sigma)$

$=\frac{0.9545-0.6827}{2}+0.6827=0.8186$； …………………………………………………… 6 分

(2)根据题意，可得出随机变量 X 的可能取值有 20、40、60、80 元，

$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$， …………………………………………………… 7 分

$P(X=40)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{18}$； …………………………………… 8 分

$P(X=60)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$， …………………………………………… 9 分

$P(X=80)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$， …………………………………………… 10 分

所以，随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	20	40	60	80
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$

所以，随机变量 X 的数学期望为 $EX=20\times\frac{1}{3}+40\times\frac{7}{18}+60\times\frac{2}{9}+80\times\frac{1}{18}=40$. ………………… 12 分

21. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上一点 $P(6,y_0)$ 到焦点 F 的距离 $|PF|=2y_0$.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)过点 F 且倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点,点 M 为抛物线 C 准线上一点,且 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3$,求△$MAB$ 的面积.

解:(1)由抛物线的定义得 $|PF|=y_0+\frac{p}{2}$. 由题意得 $\begin{cases}2y_0=y_0+\frac{p}{2}\\36=2py_0\\p>0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}y_0=3\\p=6\end{cases}$, ∴抛物线的方程为 $x^2=12y$; ………………… 4 分

(2)由(1)知点 $F(0,3)$,∴直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$. 由 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0\\x^2=12y\end{cases}$ 可得 $y^2-10y+9=0$, ………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $y_1=1,y_2=9,y_1+y_2=10$, 点 A,B 的坐标分别为 $(2\sqrt{3},1),(-6\sqrt{3},9)$.

设点 M 的坐标为 $(t,-3)$,则 $\overrightarrow{MA}=(2\sqrt{3}-t,4)$,$\overrightarrow{MB}=(-6\sqrt{3}-t,12)$,

则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(2\sqrt{3}-t)(-6\sqrt{3}-t)+4\times12=3$,解得 $t=-\sqrt{3}$ 或 $-3\sqrt{3}$ ………………………………………… 8 分

∴ $|AB|=|AF|+|BF|=\left(y_1+\frac{p}{2}\right)+\left(y_2+\frac{p}{2}\right)=y_1+y_2+p=10+6=16$,

则点 M 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|t-6\sqrt{3}|}{2}$,故 $d=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, ………………………………………… 10 分

当 $d=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 时,△MAB 的面积为 $S=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=28\sqrt{3}$. ………………………………………… 11 分

当 $d=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 时,△MAB 的面积为 $S=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=36\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

22. 已知函数 $f(x)=ax^2-\ln(ax)(a>0)$.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极值,求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)是否存在实数 a,使得 $f(x)\geqslant x$ 恒成立?若存在,求实数 a 的取值集合;若不存在,请说明理由.

解:(1) $f(x)=ax^2-\ln(ax)$,$f'(x)=2ax-\frac{1}{x}$, ………………………………………… 1 分

∵ $f(x)$ 在 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得极值,∴ $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=2a\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=0$,,解得 $a=1$. ∴ $f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$. ………………… 3 分

令 $f'(x)>0$,得 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$;令 $f'(x)<0$,得 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

∴ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$,单调递减区间为 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$; ………………………………… 5 分

(2)假设存在实数 a,使得 $f(x)\geqslant x$ 恒成立,即 $ax^2-x-\ln(ax)\geqslant0$ 恒成立. ………………………… 6 分

令 $F(x)=ax^2-x-\ln(ax)$,则 $F'(x)=\frac{2ax^2-x-1}{x}$,令 $G(x)=2ax^2-x-1$, 又 $a>0$,则 $\Delta=1+8a>0$,

∴ $G(x)=0$ 有两个不等根 $x_1,x_2,x_1x_2=-\frac{1}{2a}<0$,不妨设 $x_1<0<x_2$.

∴ $F(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上递减,在 $(x_2,+\infty)$ 上递增. ∴ $F(x_2)=ax_2^2-x_2-\ln(ax_2)\geqslant0$ 成立. ………………… 8 分

∵ $G(x_2)=2ax_2^2-x_2-1=0$. ∴ $ax_2=\frac{1+x_2}{2x_2}$,∴ $F(x)\geqslant F(x_2)=\frac{1-x_2}{2}-\ln\frac{1+x_2}{2x_2}\geqslant0$.

令 $H(x)=\frac{1-x}{2}-\ln\frac{1+x}{2x}=\frac{1-x}{2}+\ln 2x-\ln(1+x)$,$H'(x)=-\frac{(x-1)(x+2)}{2x(x+1)}$,

∴ $H'(x)$ 在 $(0,1)$ 有 $H'(x)>0$,在 $(1,+\infty)$ 上有 $H'(x)<0$,∴ $H(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增,在 $(1,+\infty)$ 上递减.

∴ $H(x)\leqslant H(1)=0$.

又 $F(x_2)=\frac{1-x_2}{2}-\ln\frac{1+x_2}{2x_2}\geqslant0$,所以 $F(x_2)=0,x_2=1$. 代入 $ax_2=\frac{1+x_2}{2x_2}$,得 $a=1$, ………………… 11 分

∴存在实数 a,使得 $f(x)\geqslant x$ 恒成立,此时 $a=1$. ………………………………………… 12 分