

现象教学视角下的任意角教学实录与反思

孙四周 (江苏省苏州市吴江盛泽中学 215226)



作者简介:孙四周,江苏东海人,1985年6月毕业于徐州师范学院(今江苏师范大学)数学系,现任吴江盛泽中学教师,江苏省特级教师,正高级教师.在省级以上发表或获奖文章二百余篇,出版专著3部.发表的数学定理有13条被大型工具书《几何瑰宝》收录(该书共收录古今中外平面几何定理约1500条),是中国人中被收录最多的.教学主张是“教会学生思考”.自2014年春季起即带领团队致力于在“常规课堂里实施现象教学”的教改实验,并在2017年初实现技术突破,至今已习惯于现象教学.

1 教材和学情分析

1.1 教材分析

所用教材为《普通高中课程标准实验教科书·数学(必修4)》(苏教版),第1章“三角函数”第1节,是整个高中三角函数的起始课.任意角是对初中角概念的推广,也是二维角的最终推广,它是建立三角函数概念的基础.

若从知识教学的角度看,任意角在整个教材体系中不是重点内容(因而极易被学生轻视).但从现象教学的角度看,“任意角”在两个方面极为体现数学素养,一是知识推广的原则(必要性和可行性),二是现实问题数学化(数学抽象和数学建模).三角函数是用来描述周期现象的,而任意角在坐标系内的表示就已经清晰地体现为周期现象.说到底,正因为角本身的周期性,才有了三角函数的周期性.基于这样的分析,本节课有其特有的教育价值.

教学目标 (1)认识角推广的必要性和可行性、理解任意角的概念,会把角表示在坐标系中;(2)给定任意的度数,会判断角终边的位置;(3)给定角终边的位置,能写出角度数的集合.

教学重点 角概念的推广和在坐标系内的表示.

教学难点 同终边的角的集合.

1.2 学情分析

学生来自四星级高中普通班,数学基础较好.习惯于情境教学,能配合老师活动,但主动探究能力、创新能力稍嫌不足.

2 教学过程

2.1 表象感知阶段

师:在观看体操和跳水比赛的时候,我们会听

到一些解说词,比如“转体 720° ”“转体两周半”.

说明 此时并不播放体操或跳水的画面,而是让学生自己想象画面.老师讲话慢一点,给学生留出想象的时间.多数学生会边想象边用手比划,老师鼓励他们“精确比划”.

师:“转体两周半”是多少度?

生:(借助于精确的比划,利用“周角等于 360° ”进行计算) 900° .

师:你能在纸上画出 900° 角吗?

生:(有点不安)画不出.

2.2 具体认识阶段

师:画不出这个角,没关系,我们从能画出的角入手.现在,我们来画下面的几个角,请快一点:
 $60^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 210^\circ$.

说明 画前面4个角时,学生很得意,情绪高涨,迅速进入了学习状态.而在遇上 210° 的瞬间,一切都变了.

生:什么? 210° ?啥意思?从来没听说过啊——

师:是的,是要你们画 210° 的角.

生:(经过一番纠结,他们有了这样的判断: 210° 自然是比 180° 大的)应当是这个样子(图1、图2).

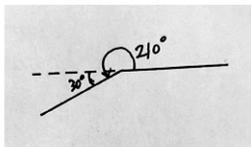


图1

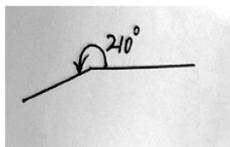


图2

师:完全正确,数学家们就是这样画的.我们从来没见过 210° 角,现在却画了出来,是怎么想

到的?

生:说不出理由,凭感觉.

说明 顺着 $60^\circ-90^\circ-135^\circ-180^\circ$ 的惯性,有些学生没有纠结,直接就画出了 210° 角.画出来以后,就想对“自己的造物”进行逻辑上的确认,“纠结”也是免不了的.

师:我们凭的是直觉,直觉是非常宝贵的,它是一切创造力的源泉.那么,你还能创造出 270° 吗?

生:(太容易,随手就画出来了)

师: 350° 呢?(也容易)—— 390° 呢?(超出 360° ,再次陷入纠结)

(备注:此时还没有给出“任意角”的定义.在没有定义的情况下,学生能画出 390° 吗?事实是,在稍微的纠结以后他们还真画出来了,纠结的程度比画 210° 时小多了)

师:还能画更大的角吗?比如 750° .

生:能(手在转圈,比划出 750° ,已经没有纠结).

师:可以画出多大度数的角?

生:几千度、几万度都可以.

师:角的度数可以是什么范围?

生:从零到无穷大.

说明 至此,“角”在他们眼里已经没有限制.“没有限制的角”和“任意角”,差的似乎仅仅是一个名词而已.但不可以认为学生的认知已经形成,他们目前还处在直觉阶段,还需要严格的定义.

师:确实如此,从零到无穷大任意度数的角都可以画出来.现在,我们可以画出最开头的那个 900° 角了.

说明 此处留足时间,让学生把 900° 的角准确地画出来.一是回应他们感情上的需要,二是让神经松弛一下,以迎接新一轮的活动高潮.

2.3 意义抽象阶段

师:回过头来看我们画的 210° 角,为什么你不说它是 150° (即图1和图2中 210° “旁边”的部分)?

生:因为那个箭头,要是没有那个箭头,可就不好说了.

师:有道理,不能丢掉箭头.可是,我们忙活了半天,究竟什么是角呢?角的定义是什么?

生:(只能回顾初中的定义)从同一顶点出发的两条射线构成的图形.

师:这个定义能描述我们刚才所画的 210° 和 390° 吗?

生:不能,这个定义不能区分 210° 和 150° ,也不能区分 390° 和 30° .

师:我们把角的范围推广到了任意正数,大大突破了原来角的范围,原来的定义也不再适用了,看样子应当改写.怎样改写呢?

生:(尝试……)

师生:一条射线绕它的端点旋转所形成的图形叫作角.起始位置的射线叫始边,终止位置的射线叫终边(板书).

师:这个定义,能包容所有的角吗?比如很大的角,十万度的.

生:可以.因为终边可以无限制旋转下去,因此角的度数没有限制.

师:那么,新的定义还包含原来的角吗?推广必须把原来的概念保持住.

生:原来的锐角、直角、钝角都还在.也可以认为是旋转得到的,就是旋转不超过 180° .

师:好的.一是继续描述原来的现象,二是描述更多的新现象,这是数学推广的两个原则.问题是,我们把角推广到任意大的度数,有意义吗?生活中有那么大的角吗?

生:有.直升机机翼的旋转,还有大风车、风力发电机……

师:早上骑自行车来上学的同学,说说你的自行车辐条转了多少度?

生:……

说明 回归生活实际,回归对世界的认识,也为新知识增加一个“锚点”.

师:确实如此.下面请大家再来画一个角.听好: -30° .

生:“负 30° ”? 什么叫“负 30° ”?

师:你感觉呢? 什么叫 -30 米你是知道的.

生:嗯,负数是对相反意义的量的描述.一定是有两个相反的方向,规定一个方向为正,另一个就是负.(备注:老师耐心帮助,让学生动手、动脑)

师:如果对问题看不清楚,我们就应该回到角的定义.角是旋转而形成的图形,旋转的方向只有两个——

师生:一个是顺时针方向,一个是逆时针方向,正好是互为相反的两个方向.

师:那么,规定谁为正方向谁为负方向呢?

生:(好像没有标准可依)……

师:逆时针方向和顺时针方向,规定哪个为正哪个为负,决定权在我们自己手里.

生:……

师:国际上通行的规定是:逆时针方向为正,顺时针方向为负.也就是说,这个(比划逆时针箭头)是——正;这个(比划顺时针箭头)是——负.(学生跟随比划正负角).

师:这样一来, -30° 是不是就可以画出来了?

生:(画 -30°)

师:再画一个 -150° , -400° .

生:(画角)

师:负角的度数可以到多少度?

生:可以到 $-\infty$.

师:到目前为止,角的度数是什么范围?

生:从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

(其实还缺少零角)

师:确定吗?

生:(思考……)

师:在上面的过程:角的度数可以取到所有正数,也可以取到所有负数.那么——

生:还少一个零度.

师:对,现在还没有零度角.你希望有吗?如果有,它该是什么样的?

生:(画图,思考……).

师:(提示)还是从定义开始吧.

说明 回到定义,这是逻辑思维的一条重要法则,要有这样的素养.

师生:如果射线没有经过任何旋转,我们就把它看成零角(板书).这是人为规定.

师:如此说来,角的度数可以是任意实数,包括正数、零、负数.每一个角都有一个度数,每一个度数也都可以画出一个角.

(至此,“任意角”的概念已经建立)

2.4 形式表达阶段

师:简直太好了,我们可以有任意大小的角.现在,请你画一个 $100\ 000^\circ$ (十万度)的角.

生:(开始兴致很高,以为胜券在握,可动起手来才知道很难:要转的圈数太多了……)

师:我们先来预估一下,画出来的结果应该是图3中的哪一个?

说明 图3不是精确作图,只画了始边和终边,那是为了把学生注意力引导到“终边”上,而

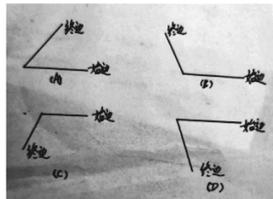


图3



图4

忽略中间转过的圈数.如果学生能体会到“可以扔掉 360° ”,那就抽象成功了;如果领会不到,这种图形也可以帮助老师讲解.图3中这些图形本身就是抽象的,图4中那个才是具体的.

师:画始边和终边,我们可以——(齐)忽略 360° .不管多少个 360° ,都不影响终边位置.因此我们应该干什么呢?

生:(活动)……

师: $100\ 000^\circ = 277 \times 360^\circ + 280^\circ$, 相当于——(齐):转过277圈以后继续转 280° ,于是 $100\ 000^\circ$ 的终边和 280° 的终边相同,因此应该是图3中的选项D.

师:为了便于研究和交流,以后我们常以角的顶点为坐标原点,角的始边为 x 轴正半轴,建立直角坐标系.这样,角的终边(除顶点外)在第几象限,就说这个角是第几象限角.

说明 教这种人为规定的知识,采用告知的方法,不安排探究.

练习(口答):下面的角分别是第几象限角? 是否有终边相同的角?

$-300^\circ, -150^\circ, -60^\circ, 60^\circ, 210^\circ, 300^\circ, 420^\circ$.

思考:锐角是第一象限角.反之,第一象限角是锐角,对吗?(答案:不对)

师:一般地,角的度数增加或减少若干个 360° ,角的终边——不变.因此,知道一个角 α 的终边与 β 的终边相同,这个角的度数并不能确定,而是可以有无数多个值,这些值构成的集合是 $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$,这其实也给我们提供了一个判断角终边位置的方法.

2.5 应用巩固阶段

例1 在 0° 到 360° 范围内,找出与下列角终边相同的角,并指出它们是第几象限角:

(1) 650° ; (2) -150° ; (3) $-990^\circ 15'$.

例2 已知 α 角与 240° 角的终边相同,试探究 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角? 2α 是第几象限角?

说明 例题主要由学生完成,老师强调解题

规范,比如 $k \in \mathbf{Z}$ 等.

2.6 回顾与反思,布置作业(略)

3 回顾与反思

3.1 设计理念^[1]

这节课,定位不是让学生学会“任意角的知识”而是让他们“对任意角进行刻画”.把学生不认识的角(实例)给他们,将其当做现象去观察、分析,最后生成了新知识、新模式,这就是基于现象的教学.如果是基于知识教学,则有相反的顺序,它会把新知识给学生,再让学生去理解知识、掌握知识、应用知识直至(希望)综合、创新.

对知识进行探究,收获的是知识;对现象进行探究,收获的是对世界的认识.现象教学也收获知识,但那仅是副产品,“主产品”是学生的探究意识和探究能力.知识容易忘记,但探究的意识和能力很难忘记,后者才构成人的内在素养,才是教育应该给予学生的.爱因斯坦、米山国藏和怀特海分别说过几乎相同的一句话:“教育就是当你把在学校里学到的东西都忘记以后还剩下的部分”,现象教学比知识教学能“剩下”更多的东西.

3.2 教学方法^[2]

(1) 知识生成

经过初中的学习,学生头脑里有了 0° — 180° 角,另外还有一个特殊的“大角”——周角(360°).从知识上看,周角是最接近于“任意角”的,它似乎处于知识的最前沿.而实际上学生还没有 180° — 360° 之间角的概念,这段空白决定着学生对“周角”的认识不是实在的, 360° 的意义只停留在“把圆周分成 360 等份,每一份叫 1° 角”.因此不能从周角出发引出任意角,我选择用 210° 和 390° 作为切入点,来突破 180° 和 360° .

(2) 知识表达

在“同终边角的表示”里,我没有按照类似“ 390° — 860° — $4\ 000^\circ$ — $100\ 000^\circ$ ”这样的顺序“循序渐进”,而是直接让学生面对 $100\ 000^\circ$ (十万度)的角.这是基于这样的考虑:学生在除法运算上不是问题,除法也不是教学的关键,关键是让学生

“想到去做除法”,这个“念头”才是核心.好念头应该让学生自己产生,而不是告诉他们让他们“学会”. $100\ 000^\circ$,手工操作不现实,便只能去“想”(你可以说学生是“被老师设计”了,也可以说老师发挥了主导作用).结果是他们“想”了,还从“想”中尝到了甜头,这种学习是快乐的.

十万度虽然是具体的角度数,但这个角不能被直接感知,它几乎等同于抽象角 α .不同的是, α 不能运算(被 360 除),十万度却是可以运算的,这就是选择十万度的理由.当然,如果选择其他诸如 5 万度、4 万度等数字,效果也一样.在学生眼里这些“度”(数)是具体的,但“角”(图形)则不在可感知的范围内,它们具有半具体半抽象的特点.这类对象既便于实际操作又便于意义抽象和创立新模式,是设计现象教学的一项重要资源(因为到这里寻找最近发展区,一找一个准).可资对比的是, 400° 就不具备这种特征,因为它太具体,用手转一圈就到了,并不必然导致数学抽象.

(3) 核心素养

记住知识,算不得核心素养,核心素养是应对真实世界的能力.“三个会”^[3]:会观察、会思考、会表达,宾语都是“世界”.但是我们只能看到“现象”,世界隐藏在现象的背后,于是现象就是我们可以研究的最实在的东西,现象教学的立足点就在这里.

现象的数学化,触及数学本质,有利于提升人的数学素养,选择适合学生的“现象”就是老师必备的业务素养.本节课的后半段, $100\ 000^\circ$ 被看成了现象,这在课的开始是不可想象的.这是基于发展的观点,也是以学生为本的观点.

参考文献

- [1] 孙四周.现象教学[M].长春:辽宁教育出版社,2018.
- [2] 孙四周.把数学问题还原为数学现象——谈“基于活动与体验的例题教学”[J].数学通报,2015(10):41-45.
- [3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:1-7.