一类函数最值的范围探究

戈晨曦

江苏省苏州市相城区陆慕高级中学　215131

[摘　要] 一个不含参数的解析式和定义域都确定的函数,它的值域应该是确定的. 如果它有最值,那么它的最值也应该是确定的. 但是有些函数不借助科学技术很难得到精确的最值,我们只有通过分析极值点的范围,从而估计出函数的最值范围. 这个估计往往伴随着一个可以接受的误差值.

[关键词] 函数最值;范围;解题探究

一个不含参数的,并且解析式和定义域都确定的函数,它的值域应该也是确定的. 如果它有最值, 那么它的最值也应该是确定的. 但是有些函数的最值,特别是一些超越函数,是很难算出具体数值的,但有时我们需要知道最值的范围. 这时就需要我们对最值进行必要的估算. 对于这种能力的考查, 符合《2019年全国统一考试(江苏卷)说明》中对于运算求解能力的考查要求:能够根据法则、公式进行正确运算、变形和数据处理;能够根据问题的条件寻找与设计合理、简捷的运算途径;能够根据要求对数据进行估计和近似计算.

问题:已知关于x的不等式$\frac{1}{2}(x-3)\ln x\leqslant\lambda$有解,求整数$\lambda$的最小值.

分析:令$h(x)=\frac{1}{2}(x-3)\ln x(x>0)$,这个结构的函数属于超越函数的范畴,我们用导数工具去研究它的变化趋势和极值. 导函数$h'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln x+1-\frac{3}{x}\right)(x>0)$又是一个超越函数,它的根是确定的,但是不知道具体的数值. 所以我们看到编题者巧妙地设置了一个求整数λ的最小值问题. 这里因为只要求λ是整数,所以对最小值的要求也由原来的需要精确的最小值转为只需要知道最小值的范围即可. 这里的最小值范围应该限制在$(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$即可. 于是我们可以根据零点存在定理得到导函数零点的一个估值,这个估值可以精确到一个合适的范围.

$h'(1)=\frac{1}{2}\left(\ln 1+1-\frac{3}{1}\right)<0$,$h'(2)=\frac{1}{2}\left(\ln 2+1-\frac{3}{2}\right)>0$,所以存在唯一$x_0\in(1,2)$,使得$h'(x_0)=0$,即$\ln x_0+1-\frac{3}{x_0}=0$,当$x\in(0,x_0)$时,$h'(x)<0$;当$x\in(x_0,+\infty)$时,$h'(x)>0$,所以$h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{1}{2}(x_0-3)\ln x_0$. 又因为$\ln x_0+1-\frac{3}{x_0}=0$,所以$\ln x_0=\frac{3}{x_0}-1$代入$h(x_0)=\frac{1}{2}(x_0-3)\ln x_0=\frac{1}{2}(x_0-3)\left(\frac{3}{x_0}-1\right)=3-\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{9}{x_0}\right)$. 又因为$x_0\in(1,2)$,所以$3-\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{9}{x_0}\right)\in\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$,这个范围跨了两个连续整数区间,不符合题意. 我们有没有办法能够进一步缩小最小值的范围呢?

我们可以通过进一步缩小导函数零点x_0的范围,从而来缩小最小值的范围. $h'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{2}+1-2\right)<0$,所以$x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$,所以$3-\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{9}{x_0}\right)\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$,所以$\lambda\geqslant 0$. 所以整数$\lambda$的最小值0.

解题感受:我们高中阶段学习的绝大多数函数都是没有办法写出值域的. 但是不是这类函数我们就不值得去研究了呢?其实这一类函数也有相当大的研究价值. 在这里我们可以研究其最值的范围问题,而且这个范围还是有条件的,必须控制在一个整数区间内,于是我们使用了隐零点和估算. 由上面的解题分析,我们发现,本题的最小值就是

作者简介:戈晨曦(1981-),本科学历,中学一级教师,从事数学教育研究,2014年获得苏州市解题比赛一等奖.

函数的极值，由于函数极值点x_0的不明确，导致了函数最小值的不明确. 但是最小值可以写成关于x_0的函数，我们可以调整定义域x_0的范围，从而来实现调整最小值范围的目的. 此题的本质是求定义域和值域的问题.

本题的思维导图如下：

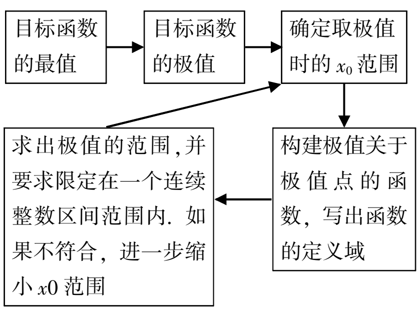

图1

解题反思：1. 如果$x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$仍然不能使$h(x_0)$限定在一个连续整数区间内，则根据零点存在定理和二分法的思想，我们可以进一步缩小，我们可以继续去寻找$\left(\frac{3}{2},2\right)$的中间值，比如取$\frac{7}{4}$，然而$h'\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{7}{4}+1-\frac{12}{7}\right)$的正负不是那么容易确定的，于是区间进一步缩小仅仅停留在了理论的层面. 实际问题中，往往很难实施. 如果我们把题目略做修整，$(x-3)\ln x\le\lambda$有解，如果按照上面的方法处理，那么左边的函数的最小值的范围$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$. 此时不符合$(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$的特点，需要进一步缩小$x_0$. 我们发现不论在$\left(\frac{3}{2},2\right)$上取哪一个值，都不是特别好确定它的导函数的正负. 所以编题者这里巧妙地设置了系数$\frac{1}{2}$，把最小值限制在了$(k,k+1)(k\in\mathbf{Z})$内. $(x-3)\ln x\le\lambda$有解，是不是真的就没有办法求解了？其实，如果我们能够证明$(x-3)\ln x>-1$对于$x>0$恒成立，那么最小值就只能落在$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$内了，问题便迎刃而解. 通过证明我们得到结论$\ln x\le x-1(x>0)$当且仅当$x=1$时取等号. 所以当$x\in(1,3)$，$(x-3)\ln x>(x-3)(x-1)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\ge-1$，当$x\in(0,1]\cup[3,+\infty)$，$(x-3)\ln x\ge0$，所以$(x-3)\ln x>-1$对于$x>0$恒成立. 再结合最小值的范围在$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，所以我们可以确定最小值的范围在$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

我们再来看一例：$e^x+\frac{1}{x}\ge a$ 对 $x>0$恒成立，求整数a的最大值.

分析：与上例类似处理，$h(x)=e^x+\frac{1}{x}(x>0)$，$h'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}(x>0)$，易得$h'(x)$在$(0,+\infty)$上递增. 又因为$h'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-4<0$，$h'\left(\frac{3}{4}\right)=e^{\frac{3}{4}}-\frac{16}{9}>0$. 所以必存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，使得$h'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0^2}=0$，所以$e^{x_0}=\frac{1}{x_0^2}$. 由分析可知$h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}+\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{x_0}$，$x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，易得$h(x_0)\in\left(\frac{28}{9},6\right)$.

问题来了，区间的跨度比较大，跨越了3个整数区间. 而且$x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$已经缩放得比较完美了，再去进行放缩，难度非常大. 这时候，如果我们发现$h(1)=e+1\in(3,4)$，那么最小值的范围就只能在区间$(3,4)$. 从上面的2个例子我们发现，有时我们在解题中善于发现特殊区间或者特殊点处函数值的范围，将大大简化我们的解题过程.

最值关于x_0的函数表达式的建构不是唯一的. 因为$\ln x_0+1-\frac{3}{x_0}=0$，所以$x_0=\frac{3}{\ln x_0+1}$，$h(x_0)=\frac{1}{2}(x_0-3)\ln x_0=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{\ln x_0+1}-3\right)\ln x_0=-\frac{3}{2}\frac{(\ln x_0)^2}{(\ln x_0+1)}$，$x_0\in\left(\frac{3}{2},2\right)$. 如果化到这个式子，则处理起来相当麻烦. 因为不同的代入方式，会得到不同的解析式. 所以我们要求构建的目标函数应该简单、明了，能够容易求得函数的值域. 下面举一例说明：

已知$f(x)=e^x-\ln x(x>0)$，若正整数$k\le f(x)$恒成立，求k的值.

分析：$f'(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$，$f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}(x>0)$，所以$y=f'(x)$单调递增. 又因为$f'(1)=e-1>0$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，所以必存在$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使$f'(x)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$. 所以$f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0$. 因为$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以$f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{1}{x_0}-\ln x_0$，如果能够进一步发现$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0=-\ln x_0$，则$f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0$. 又因为$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f(x)_{\min}=f(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，所以$k$的值为0或1.

数学的思想方法存在于问题解决的过程中，一个有意义且高效的解题过程的每个步骤无不体现着数学思想方法的指导作用[1]. 本题在解决过程中很好地体现了这一点，比如：最值到极值体现了化归与转化思想，极值的函数构建体现了函数与方程思想，缩小x_0的范围体现了逼近思想.

参考文献：

[1] 蒋海燕. 中学数学核心素养[M]. 济南：山东人民出版社，2017.