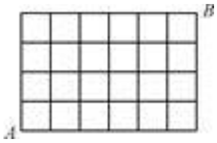
2020届高三数学附加周三练3　　2019/9/18

班级________ 学号_______ 　　姓名_______________

一、解答题（本大题共4小题，共40.0分）

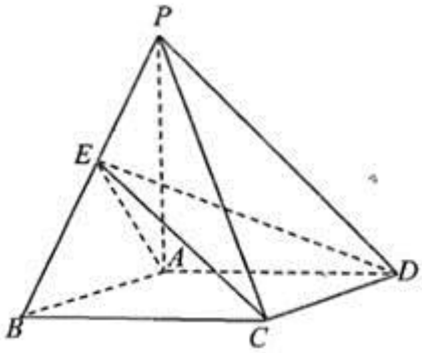
1. 某区有7条南北向街道，5条东西向街道(如图所示).



(1) 图中共有多少个矩形？

(2) 从 A 点到 B 点最近的走法有多少种？

2. 如图，四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$,，$AD=1$, $PA=AB=\sqrt{2}$，点 E 是棱 PB 的中点.



（1）求异面直线 EC 与 PD 所成角的余弦值；

（2）求二面角 B-EC-D 的余弦值。

3. 某公司在迎新年晚会上举行抽奖活动，有甲，乙两个抽奖方案供员工选择.

方案甲：员工最多有两次抽奖机会，每次抽奖的中奖率均为$\frac{4}{5}$，第一次抽奖，若未中奖，则抽奖结束，若中奖，则通过抛一枚质地均匀的硬币，决定是否继续进行第二次抽奖，规定：若抛出硬币，反面朝上，员工则获得 500 元奖金，不进行第二次抽奖；若正面朝上，员工则须进行第二次抽奖，且在第二次抽奖中，若中奖，则获得 1000 元；若未中奖，则所获得奖金为 0 元.

方案乙：员工连续三次抽奖，每次中奖率均为$\frac{2}{5}$，每次中奖均可获得奖金 400 元.

(Ⅰ)求某员工选择方案甲进行抽奖所获奖金X(元)的分布列；

(Ⅱ)试比较某员工选择方案乙与选择方案甲进行抽奖，哪个方案更划算？

4. 已知 $n\in N^*$，$nf(n)=C_n^0C_n^1+2C_n^1C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}C_n^n$.

（1）求 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ 的值；

（2）试猜想 $f(n)$ 的表达式（用一个组合数表示），并证明你的猜想.

高三数学附加周三练3答案

1.【答案】解：（1）在7条南北向街道中任选2条，5条东西向街道中任选2条，这样4条线可组成1个矩形，

故可组成矩形$C_7^2C_5^2=210$个．
（2）每条东西向的街道被分成6段，每条南北向的街道被分成4段，

从A到B最短的走法，一定包括6段东西方向、4段南北方向的线段，

共有$C_{10}^6=210$种走法．

【解析】本题考查排列组合的简单应用，得出组成矩形的条件和最短走法是解决问题的关键，属中档题．
（1）在7条竖线中任选2条，5条横线中任选2条，这样4条线即可组成一个矩形；
（2）每种最短走法，即是从10段中选出6段走东向的，选出4段走北向的，由组合数和计数原理可得．
2.【答案】解：（1）因$PA\perp$底面$ABCD$，且底面$ABCD$为矩形，所以AB、AD、AP两两垂直，以A为原点，AB、AD、AP分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系，
又因$PA=AB=\sqrt{2}$，AD=1，所以$A(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(\sqrt{2},1,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，

因E棱PB的中点，所以$E(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

所以$\overrightarrow{EC}=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PD}=(0,1,-\sqrt{2})$，所以$\cos<\overrightarrow{EC},\overrightarrow{PD}>=\frac{1+1}{\sqrt{\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以异面直线EC与PD所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（2）由（1）得$\overrightarrow{EC}=(\frac{\sqrt{2}}{2},1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{2},0,0)$，

设平面BEC的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，所以$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}z_1=0\\ y_1=0\end{cases}$，

令$x_1=1$，则$z_1=1$，所以面BEC的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=(1,0,1)$，

设平面DEC的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，所以$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+y_2-\frac{\sqrt{2}}{2}z_2=0\\ \sqrt{2}x_2=0\end{cases}$，

令$z_2=\sqrt{2}$，则$y_2=1$，所以面DEC的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(0,1,\sqrt{2})$，
所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由图可知二面角$B-EC-D$为钝角，所以二面角$B-EC-D$的余弦值为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.【答案】解:(Ⅰ)$P(X=0)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{25}$, $P(X=500)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$, $P(X=1000)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{25}$,

所以某员工选择方案甲进行抽奖所获奖金 X（元）的分布列为

X	0	500	1000
P	$\frac{7}{25}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，选择方案甲进行抽奖所获得奖金 X 的均值$E(X)=500\times\frac{2}{5}+1000\times\frac{8}{25}=520$,

若选择方案乙进行抽奖中奖次数 $\xi\sim B(3,\frac{2}{5})$，则$E(\xi)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$,

抽奖所获奖金 X 的均值 $E(X)=E(400\xi)=400E(\xi)=480$，
故选择方案甲较划算.

【解析】本题考查了相互独立事件的概率计算公式、数学期望计算公式、二项分布列的性质，考查推理能力与计算能力，属于中档题.
（*I*）利用相互独立事件的概率计算公式即可得出.
（*II*）利用数学期望计算公式、二项分布列的性质即可得出.
4.【答案】解：（1）由条件，$nf(n)=C_n^0C_n^1+2C_n^1C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}C_n^n$ ①，
在①中令 $n=1$，得 $f(1)=1$.
在①中令 $n=2$，得 $2f(2)=6$，得 $f(2)=3$.
在①中令 $n=3$，得 $3f(3)=30$，故 $f(3)=10$.
（2）猜想 $f(n)=C_{2n-1}^n$.
要证猜想成立，只要证等式 $nC_{2n-1}^n=C_n^0\bullet C_n^1+2C_n^1\bullet C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}\bullet C_n^n$ 成立.
由 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$ ①，
两边同时对 x 求导数，可得 $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\cdots nC_n^nx^{n-1}$ ②，
把等式①和②相乘，可得 $n(1+x)^{2n-1}=(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n)\bullet(C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\ldots+nC_n^nx^{n-1})$ ③.
等式左边 x^n 的系数为 nC_{2n-1}^n，等式右边 x^n 的系数为$C_n^1\bullet C_n^n+C_n^2\bullet 2C_n^{n-1}+C_n^3\bullet 3C_n^{n-2}+\cdots+nC_n^n\bullet nC_n^1$
$=C_n^1\bullet C_n^0+2C_n^2\bullet C_n^1+3C_n^3\bullet C_n^2+\cdots+nC_n^n\bullet C_n^{n-1}=C_n^0C_n^1+2C_n^1C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}C_n^n$，
根据等式③恒成立，可得 $nC_{2n-1}^n=C_n^0C_n^1+2C_n^1C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}C_n^n$.
故 $f(n)=C_{2n-1}^n$成立.

【解析】（1）在条件中，分别令 n 取 1，2，3，求得 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$ 的值.
（2）猜想 $f(n)=C_{2n-1}^n$. 要证猜想成立，只要证等式 $nC_{2n-1}^n=C_n^0\bullet C_n^1+2C_n^1\bullet C_n^2+\cdots+nC_n^{n-1}\bullet C_n^n$成立. 由$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$①，两边同时对 x 求导数，可得 $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+nC_n^nx^{n-1}$②，把①、②相乘，根据等式左右两边 x^n 的系数相等，可得结论.
本题主要考查二项式定理的应用，用猜证法证明恒等式，求函数的导数，属于难题.