二、中档题:

1．[2010 全国新课标（理）T9]若 cosα= $-\frac{4}{5}$，α 是第三象限的角，则$\frac{1+tan\frac{\alpha}{2}}{1-tan\frac{\alpha}{2}}$ =（　　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．－2

【解答】解：由$cos\alpha=-\frac{4}{5}$，α 是第三象限的角，

∴可得$sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

则$\frac{1+tan\frac{\alpha}{2}}{1-tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{cos\frac{\alpha}{2}+sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}-sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{1-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{1}{2}$，

故选：A.

2. [2011 全国新课标（文）T7（理）T 5]已知角 θ 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的正半轴重合，终边在直线 $y=2x$ 上，则 $\cos 2\theta=($　　$)$

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【解答】解：根据题意可知：$\tan\theta=2$，

所以 $\cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{1}{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{5}$，

则 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$．

故选：B．

3. [2011 全国新课标（理）T11]设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且 $f(-x)=f(x)$，则(　　)

A．$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减　　B．$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4})$ 单调递减

C．$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增　　D．$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}$，$\frac{3\pi}{4})$ 单调递增

【解答】解：由于 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)+\cos(\omega x+\phi)=\sqrt{2}\sin(\omega x+\phi+\frac{\pi}{4})$，

由于该函数的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$，得出 $\omega=2$，

又根据 $f(-x)=f(x)$，得 $\varphi+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，以及$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得出 $\varphi=\frac{\pi}{4}$．

因此， $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\sqrt{2}\cos 2x$，

若 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $2x\in(0,\pi)$，从而 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减，

若 $x\in(\dfrac{\pi}{4}$， $\dfrac{3\pi}{4})$，则 $2x\in(\dfrac{\pi}{2}$， $\dfrac{3\pi}{2})$，

该区间不为余弦函数的单调区间，故 B， C， D 都错， A 正确.

故选： A.

4．[2011 全国新课标（文）T11]设函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})$，则 (　　)

A． $y=f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

B． $y=f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递增，其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

C． $y=f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减，其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称

D． $y=f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减，其图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

【解答】解：因为 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+\cos(2x+\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\sqrt{2}\cos 2x$. 由于 $y=\cos 2x$ 的对称轴为 $x=\dfrac{1}{2}k\pi(k\in Z)$，所以 $y=\sqrt{2}\cos 2x$ 的对称轴方程是： $x=\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$，所以 A， C 错误； $y=\sqrt{2}\cos 2x$ 的单调递减区间为 $2k\pi$剟$2x$ $\pi+2k\pi(k\in Z)$，即 $k\pi$剟x $\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 单调递减，所以 B 错误， D 正确.

故选： D.

5．[2012 全国新课标（理）T9]已知 $\omega>0$，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$ 在 $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 上单调递减. 则 ω 的取值范围是　　　　　　　　(　　)

A． $[\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}]$　　　B． $[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}]$　　　C． $(0,\dfrac{1}{2}]$　　　D． $(0,2]$

【答案】 A

【解析】 $\omega=2\Rightarrow(\omega x+\dfrac{\pi}{4})\in[\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{9\pi}{4}]$ 不合题意 排除 (D)

$\omega=1\Rightarrow(\omega x+\dfrac{\pi}{4})\in[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}]$ 合题意 排除 $(B)(C)$

另: $\omega(\pi-\dfrac{\pi}{2})\le\pi\Leftrightarrow\omega\le 2$, $(\omega x+\dfrac{\pi}{4})\in[\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4},\pi\omega+\dfrac{\pi}{4}]\subset[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}]$

得: $\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{4}\ge\dfrac{\pi}{2},\pi\omega+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\le\omega\le\dfrac{5}{4}$

6．[2012 全国大纲（理）T7]已知 α 为第二象限角，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$-\frac{\sqrt{5}}{9}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{9}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{3}$

【答案】A

【解析】

解法一：$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，两边平方可得 $1+\sin 2\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin 2\alpha=-\frac{2}{3}$

$\because\alpha$ 是第二象限角，因此 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\sqrt{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=-\sqrt{1+\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\therefore\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

解法二：单位圆中函数线+估算，因为 α 是第二象限的角，又 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{2}$

所以"正弦线"要比"余弦线"长一半多点，如图，故 $cos2\alpha$ 的"余弦线"应选 A.

7．[2014 全国**新课标** II 卷(理)-T04]钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则 $AC=$（　　）

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．2　　D．1

【解答】解：$\because$ 钝角三角形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}$，$AB=c=1$，$BC=a=\sqrt{2}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当 B 为钝角时，$\cos B=-\sqrt{1-sin^2B}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

利用余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\bullet\cos B=1+2+2=5$，即 $AC=\sqrt{5}$，

当 B 为锐角时，$\cos B=\sqrt{1-sin^2B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

利用余弦定理得：$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\bullet BC\bullet\cos B=1+2-2=1$，即 $AC=1$，

此时 $AB^2+AC^2=BC^2$，即 ΔABC 为直角三角形，不合题意，舍去，

则 $AC=\sqrt{5}$.

故选：B.

8．[2018 全国 II 卷(理)-T10]若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a$，$a]$ 是减函数，则 a 的最大值是（　　）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．π

【解答】解：$f(x)=\cos x-\sin x=-(\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\pi+2k\pi$，$k\in Z$，

取 $k=0$，得 $f(x)$ 的一个减区间为 $[-\frac{\pi}{4}，\frac{3}{4}\pi]$，

由 $f(x)$ 在 $[-a，a]$ 是减函数，

得 $\begin{cases}-a\geqslant-\frac{\pi}{4}\\ a\leqslant\frac{3\pi}{4}\end{cases}$，$\therefore a\leqslant\frac{\pi}{4}$．

则 a 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$．

故选：A．

9．[2018 全国Ⅰ卷(文)-T08]已知函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$，则(　　)

A．$f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 3

B．$f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4

C．$f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 3

D．$f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 4

【解答】解：函数 $f(x)=2\cos^2x-\sin^2x+2$

$=2\cos^2x-\sin^2x+2\sin^2x+2\cos^2x$

$=4\cos^2x+\sin^2x$

$=3\cos^2x+1$

$=3\cdot\frac{\cos 2x+1}{2}+1$

$=\frac{3\cos 2x}{2}+\frac{5}{2}$，

故函数的最小正周期为 π，

函数的最大值为 $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$，

故选：B．

10．[2018 全国Ⅰ卷(文)-T11]已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $|a-b|=$(　　)

A． $\frac{1}{5}$　　　　B． $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　　C． $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　　　D． 1

【解答】解：$\because$ 角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，

终边上有两点 $A(1,a)$ ， $B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\frac{2}{3}$，

$\therefore \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{3}$，解得 $\cos^2\alpha=\frac{5}{6}$，

$\therefore |\cos\alpha|=\frac{\sqrt{30}}{6}$， $\therefore |\sin\alpha|=\sqrt{1-\frac{30}{36}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

$|\tan\alpha|=|\frac{b-a}{2-1}|=|a-b|=\frac{|\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{30}}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

故选： B．