

数 学

2021.03

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

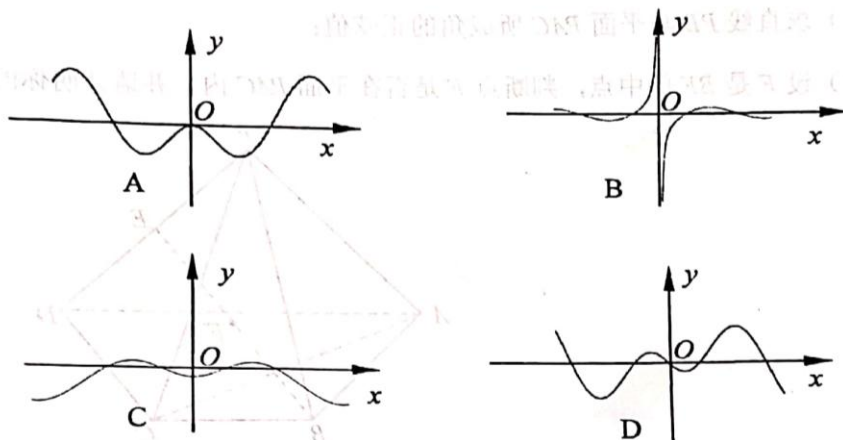
一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = [2, 4]$, $B = \{x | \log_2 x > 1\}$, 则集合 $A \cap (\complement_U B) =$
A. $\emptyset$ B. $\{2\}$ C. $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$ D. $\{x | x \leq 2\}$
2. “ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 是 “ $\sin \alpha = \cos \alpha$ ” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 天干地支纪年法源于中国, 中国自古便有十天干与十二地支, 十天干即甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸; 十二地支即子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配, 排列起来, 天干在前, 地支在后, 天干由“甲”起, 地支由“子”起, 例如, 第一年为“甲子”, 第二年为“乙丑”, 第三年为“丙寅”..., 以此类推, 排列到“癸酉”后, 天干回到“甲”重新开始, 即“甲戌”, “乙亥”, 然后地支回到“子”重新开始, 即“丙子”..., 以此类推。今年是辛丑年, 也是伟大、光荣、正确的中国共产党成立 100 周年, 则中国共产党成立的那一年是
A. 辛酉年 B. 辛戌年 C. 壬酉年 D. 壬戌年

4. $(3-2x)(x+1)^5$ 展开式中 x^3 的系数为

- A. -15 B. -10 C. 10 D. 15

5. 函数 $f(x) = \sin x \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的图象大致是



6. 过抛物线 $y^2 = 2x$ 上一点 P 作圆 $C: x^2 + (y-6)^2 = 1$ 的切线, 切点为 A, B , 则当

四边形 $PACB$ 的面积最小时, P 点的坐标是

- A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(\frac{3}{2}, \sqrt{3})$ C. $(2, 2)$ D. $(\frac{5}{2}, \sqrt{5})$

7. 若随机变量 $X \sim B(3, p)$, $Y \sim N(2, \sigma^2)$, 若 $P(X \geq 1) = 0.657$, $P(0 < Y < 2) = p$,

则 $P(Y > 4) =$

- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.7 D. 0.8

8. 若 $f(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{16}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是

- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$ B. $(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [3, +\infty)$
C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ，则

A. 函数 $y = f(x)$ 的图象可由函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到

B. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 轴对称

C. 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 中心对称

D. 函数 $y = x^2 + f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{8})$ 上为增函数

10. 已知 O 为坐标系原点， F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点，点 P 在双曲线右支上，则下列结论正确的有

A. 若 $PO = PF_2$ ，则双曲线的离心率 $e \geq 2$

B. 若 $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，则 $b^2 = 2\sqrt{3}$

C. 若 A_2 为双曲线的右顶点， $PF_2 \perp x$ 轴，则 $F_2A_2 = F_2P$

D. 若射线 F_2P 与双曲线的一条渐近线交于点 Q ，则 $|QF_1 - QF_2| > 2a$

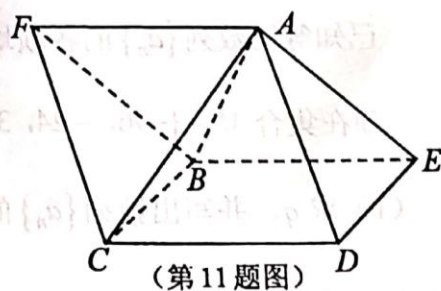
11. 1982 年美国数学学会出了一道题：一个正四面体和一个正四棱锥的所有棱长都相等，将正四面体的一个面和正四棱锥的一个侧面紧贴重合在一起，得到一个新几何体。中学生丹尼尔做了一个如图所示的模型寄给美国数学学会，美国数学学会根据丹尼尔的模型修改了有关结论。对于该新几何体，则

A. $AF \parallel CD$

B. $AF \perp DE$

C. 新几何体有 7 个面

D. 新几何体的六个顶点不能在同一个球面上



2. 已知正数 x, y, z 满足 $3^x = 4^y = 12^z$ ，则

A. $6z < 3x < 4y$

B. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{z}$

C. $x + y > 4z$

D. $xy < 4z^2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $a=(1, 2)$, $b=(0, -2)$, $c=(-1, \lambda)$, 若 $(2a-b) \parallel c$, 则实数 $\lambda = \underline{\quad\quad}$.

14. 已知复数 z 对应的点在复平面第一象限内, 甲、乙、丙、丁四人对复数 z 的陈述如下 (i 为虚数单位):

甲: $z+\bar{z}=2$; 乙: $z-\bar{z}=2\sqrt{3}i$; 丙: $z\cdot\bar{z}=4$; 丁: $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{z^2}{2}$.

在甲、乙、丙、丁四人陈述中, 有且只有两个人的陈述正确, 则复数 $z = \underline{\quad\quad}$.

15. 若 $2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x = 1$, 则 $\sin(\frac{5\pi}{6} - x) \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \underline{\quad\quad}$.

16. 四面体的棱长为 1 或 2, 但该四面体不是正四面体, 请写出一个这样四面体的体积 $\underline{\quad\quad}$; 这样的不同四面体的个数为 $\underline{\quad\quad}$.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 点 D 在边 BC 上, 满足 $AB = \sqrt{3}BD$.

(1) 若 $\angle BAD = 30^\circ$, 求 $\angle C$;

(2) 若 $CD = 2BD$, $AD = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数, 公比为 q , 且 $|q| > 1$, 数列 $\{a_n\}$ 中有连续四项在集合 $M = \{-96, -24, 36, 48, 192\}$ 中.

(1) 求 q , 并写出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: 数列 $\{S_n\}$ 中的任意连续三项按适当顺序排列后, 可以成等差数列.

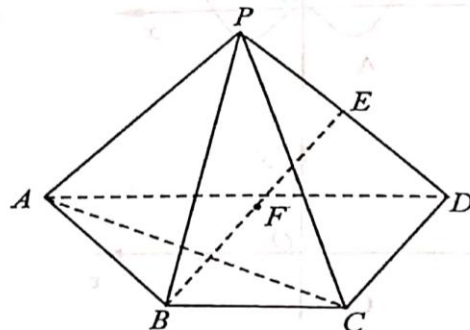
19. (12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形,

$BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $AD = 2AB = 2BC = 2$, $PC = \sqrt{2}$, E 为 PD 的中点.

(1) 求直线 PB 与平面 PAC 所成角的正弦值;

(2) 设 F 是 BE 的中点, 判断点 F 是否在平面 PAC 内, 并请证明你的结论.



(第19题图)

1. (12分)

某地发现6名疑似病人中有1人感染病毒, 需要通过血清检测确定该感染人员, 血清检测结果呈阳性的即为感染人员, 呈阴性表示没感染. 拟采用两种方案检测:

方案甲: 将这6名疑似病人血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止;

方案乙: 将这6名疑似病人随机分成2组, 每组3人. 先将其中一组的血清混在一起检测, 若结果为阳性, 则表示感染人员在该组中, 然后再对该组中每份血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止; 若结果呈阴性, 则对另一组中每份血清逐个检测, 直到能确定感染人员为止.

(1) 求这两种方案检测次数相同的概率;

(2) 如果每次检测的费用相同, 请预测哪种方案检测总费用较少? 并说明理由.

(12分)

已知 O 为坐标系原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右焦点为点 F , 右准线为直线 n .

(1) 过点 $(4, 0)$ 的直线交椭圆 C 于 D, E 两个不同点, 且以线段 DE 为直径的圆经过原点 O , 求该直线的方程;

(2) 已知直线 l 上有且只有一个点到 F 的距离与到直线 n 的距离之比为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

直线 l 与直线 n 交于点 N , 过 F 作 x 轴的垂线, 交直线 l 于点 M .

求证: $\frac{FM}{FN}$ 为定值.

(12分)

已知函数 $f(x) = 1 + m \ln x$ ($m \in \mathbb{R}$).

(1) 当 $m = 2$ 时, 一次函数 $g(x)$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq g(x) \leq x^2$ 恒成立,

求 $g(x)$ 的表达式;

(2) 讨论关于 x 的方程 $\frac{f(x)}{f(\frac{1}{x})} = x^2$ 解的个数.