

一道调考试题的5种解法

●李红春 (黄陂区第一中学盘龙校区 湖北武汉 430312)

题目 已知点 P 为曲线 $xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 = 0$ 上任意一点 O 为坐标原点 则 $|OP|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

这是湖北省武汉市2015届高三月考的一道试题,是选择题中的把关试题.从学生反馈来看,此题难度颇大.考试中做对的学生普遍采用的是“筛选法”,具体如下:

因为 $\frac{\sqrt{6}}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以在本题的4个选项中, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 最小. 由于 $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$, 点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 满足曲线方程 $xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 = 0$, 即点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 在曲线 $xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 = 0$ 上, 此时 $|OP| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 在4个选项中最小, 故选A.

如果该题是填空题或解答题,又该怎么办呢?下面笔者给出5种解法,以飨读者:

解法1 由 $xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 = 0$ 得

$$(x-2)\left(y-\frac{5}{2}\right)=2.$$

令 $x-2=m$, $y-\frac{5}{2}=n$, 则 $mn=2$. 显然当 m, n 均为负数时, $|OP|^2 = (m+2)^2 + \left(n+\frac{5}{2}\right)^2$ 才可能最小, 即

$$|OP|^2 = (m+2)^2 + \left(n+\frac{5}{2}\right)^2 =$$

$$(m+2)^2 + \left(\frac{2}{m}+\frac{5}{2}\right)^2 =$$

$$m^2 + 4m + 4 + \frac{4}{m^2} + \frac{10}{m} + \frac{25}{4}.$$

令 $L(m) = m^2 + 4m + 4 + \frac{4}{m^2} + \frac{10}{m} + \frac{25}{4}$, 则

$$L'(m) = 2m + 4 - \frac{8}{m^3} - \frac{10}{m^2} = \frac{2m^4 + 4m^3 - 10m - 8}{m^3},$$

显然 $m = -1$ 是方程 $2m^4 + 4m^3 - 10m - 8 = 0$ 的一个根, 从而

$$2m^4 + 4m^3 - 10m - 8 =$$

$$(m+1)(2m^3 + pm^2 + qm - 8) = 0,$$

分别比较等号左、右2边的三次项和二次项系数, 可知

$$\begin{cases} 2+p=4, \\ p+q=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} p=2, \\ q=-2, \end{cases}$$

于是 $2m^4 + 4m^3 - 10m - 8 =$

$$(m+1)(2m^3 + 2m^2 - 2m - 8).$$

设 $g(m) = 2m^3 + 2m^2 - 2m - 8$, 其中 $m \in (-\infty, 0)$ 则

$$g'(m) = 6m^2 + 4m - 2 = 2(3m-1)(m+1).$$

当 $m \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(m) > 0$, $g(m)$ 递增; 当 $m \in (-1, 0)$ 时, $g'(m) < 0$, $g(m)$ 递减, 从而

$$g(m) \leq g(-1) = -6 < 0,$$

于是当 $m \in (-\infty, -1)$ 时, $L'(m) < 0$, $L(m)$ 递减; 当 $m \in (-1, 0)$ 时, $L'(m) > 0$, $L(m)$ 递增, 故

$$L(m)_{\min} = L(-1) = \frac{5}{4},$$

从而 $|OP|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

解法2 由 $xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 = 0$ 得

$$y = \frac{2}{x-2} + \frac{5}{2},$$

则

$$y' = -\frac{2}{(x-2)^2}.$$

如图1, 设圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 与双曲线切于点 $P(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 \in (-\infty, 2)$. 双曲线在点 P 处的切线斜率为 $k = -\frac{2}{(x_0 - 2)^2}$, 圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 在点 P 处的切线斜率为 $k = -\frac{x_0}{y_0}$, 则

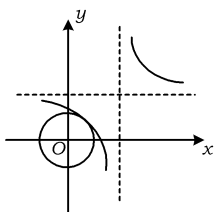


图1

$$-\frac{2}{(x_0 - 2)^2} = -\frac{x_0}{y_0},$$

$$\text{即 } 2y_0 = x_0(x_0 - 2)^2.$$

又 $y_0 = \frac{2}{x_0 - 2} + \frac{5}{2}$, 消去 y_0 得

$$2\left(\frac{2}{x_0 - 2} + \frac{5}{2}\right) = x_0(x_0 - 2)^2,$$

$$\text{即 } x_0^4 - 6x_0^3 + 12x_0^2 - 13x_0 + 6 = 0,$$

观察该方程可知 $x_0 = 1$ 是方程的一个根, 用待定系数法方程可变形为

$$(x_0 - 1)(x_0^3 - 5x_0^2 + 7x_0 - 6) = 0.$$

设 $g(x_0) = x_0^3 - 5x_0^2 + 7x_0 - 6$, 其中 $x_0 \in (-\infty, 2)$, 则

$$g'(x_0) = 3x_0^2 - 10x_0 + 7 = (3x_0 - 7)(x_0 - 1),$$

当 $x_0 \in (-\infty, 1)$ 时 $g'(x_0) > 0$, $g(x_0)$ 递增; 当 $x_0 \in (1, 2)$ 时 $g'(x_0) < 0$, $g(x_0)$ 递减, 从而 $g(x) \leq g(1) = -3$, 故方程 $x_0^4 - 6x_0^3 + 12x_0^2 - 13x_0 + 6 = 0$ 只有一个实根 $x_0 = 1$. 易求得 $y_0 = \frac{1}{2}$, 故 $|OP|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

点评 解法1、解法2的共同点是首先要能观察出高次方程的一个根, 然后用待定系数法将高次方程进行因式分解, 再构造函数借助导数证明其余的因式一定非零. 解答过程计算量较大, 在紧张的考试氛围中对学生确实是巨大的挑战!

解法3 设点 $P(x, y)$ 则

$$|OP|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 =$$

$$\frac{3}{4}(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2} + y - 1\right)^2 + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4}.$$

$$\text{当 } \begin{cases} x-1=0, \\ \frac{x}{2} + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时,} \\ (x^2 + y^2)_{\min} = \frac{5}{4},$$

$$\text{因此 } |OP|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

解法4 设点 $P(x, y)$ 则

$$|OP|^2 = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3 =$$

$$\frac{3}{4}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} \geq \frac{5}{4}.$$

$$\text{当 } \begin{cases} y - \frac{1}{2} = 0, \\ x + \frac{1}{2}y - \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时,}$$

$$(x^2 + y^2)_{\min} = \frac{5}{4},$$

$$\text{因此 } |OP|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

点评 解法3、解法4均采用配方法, 解题的难点有2个: 1) “0”的配凑, 即将 $x^2 + y^2$ 写成较复杂的式子 $x^2 + y^2 + xy - \frac{5}{2}x - 2y + 3$, 这与平常解题中的求简意识相悖; 2) 配方法的熟练运用.

解法5 观察易知: 只需在 $x < 2, y < \frac{5}{2}$ 的情况

下来研究该问题. 由柯西不等式和基本不等式得

$$(x^2 + y^2)(16 + 4) \geq (4x + 2y)^2 = (-4x - 2y)^2 =$$

$$16\left[(2-x) + \left(\frac{5}{4} - \frac{y}{2}\right) - \frac{13}{4}\right]^2 \geq$$

$$16\left[2\sqrt{(2-x)\left(\frac{5}{4} - \frac{y}{2}\right)} - \frac{13}{4}\right]^2 = 25,$$

$$\text{当且仅当 } \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{2}, \\ 2-x = \frac{5}{4} - \frac{y}{2}, \\ (x-2)\left(y - \frac{5}{2}\right) = 2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x=1, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时, 等号}$$

$$\text{成立, 从而 } x^2 + y^2 \geq \frac{25}{4}, \text{ 故 } |OP|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

点评 解法5通过合理配凑, 先后灵活运用柯西不等式和均值不等式放缩, 简洁地将最值求出. 可谓自然天成, 解法之妙, 让人回味无穷, 或许这正是不等式的魅力所在!