基于元认知理论的数学教学有效性的实践研究

——以两角和与差的正切公式的教学实践为例

谭瑞军

(江苏省华罗庚中学 213200)

元认知概念由美国心理学家弗莱维尔(Flavell,1971)提出后,逐渐成为当代教育心理学的热点之一.弗莱维尔认为元认知是个体对本身认知系统的内省知识,即认知的认知.具体地说,就是关于个体自我认知过程的知识和调节这些过程的能力,即个体对思维活动的自我体验、自我观察、自我监控和自我调节.它在个体的整个认知活动过程中发挥了决定性的作用,能控制调节认知活动的方向和内容,并能促进个体认知思维能力的提升[1].数学是建立在对具体物象的反省抽象基础之上的研究数量关系和空间形式的学科,也就是说数学思维在很大程度上是反省思维,这恰恰是元认知的一个重要方面.从数学问题的解决过程看,个体通过对思维路径的生成、评估和调节,使问题得到圆满的解决,这些活动都包含了元认知成分.因此,数学教学的根本任务就是造就学生良好的认知结构,并培育其后继发展成长需要的必备品格和关键能力.高中数学教师应从元认知的视角出发,努力开展提升教学有效性的实践探究.以下笔者就以两角和与差的正切公式教学实践为例谈一些粗浅的想法.

1 从元认知视角寻找知识与认知逻辑的嵌合点,系统叙写教学目标

《学记》有言“学然后知不足,教然后知困,知不足后能自反也;知困然后能自强也.故曰教学相长也”.这里所说的自反和自强指的就是元认知在教和学的过程的体现.就课堂教学目标而言,它是指课堂教学活动实施的方向和预期达成的结果,是学生所获得的能力与品格的状态的描述,总体来说其成分应该是学科必备品格和关键能力[2].因此,课堂教学的目标应该主要以学生学习后的素养状态来表达,也就是需要明确课堂教学的知识、能力和素养目标,进而基于元认知理论制定和选择有效的教学策略.

在高中数学两角和与差的正切公式教学中,常看到这样的教学目标设定:1.理解并熟记两角和与差的正切公式; 2. 会应用公式解决求值问题.这样的表述对教学有效性的理解是肤浅的,偏重学科知识的掌握,而学科素养、能力、思想乃至价值观的发展指向叙写缺失.数学课程标准指出,数学教学活动必须建立在学生认知发展水平和已有知识经验基础之上.这就要求教师在研究教材、教法同时,加强对学生的研究,关注学生的认知基础,关注学习能力、情感、态度和价值观的培养过程,并以元认知的视角加以激发调适.课堂教学目标的预设叙写是非常重要的,预设不充分,叙写不周全,就难以较好的激发学生参与数学活动的积极性,学生各个维度的能力素养就得不到预期的发展.因此,课堂教学目标的预设叙写是教学活动开展的首要环节,基于元认知视角,我们应该有以下认识:

(1)整体把握教材是有效教学的前提.教材内容的安排,通常蕴涵了知识发生发展的线索.教师首先要深入研读文本,明晰教学内容,纵向要把握知识发生发展的来龙去脉,横向要沟通方法思想的内在联系,从而把握其在整个单元乃至中小学数学课程中的地位和作用.其次,教师还需要能对教学内容所承载的教育价值进行分析,探究挖掘教学内容背后蕴涵的学科素养及关于人的发展的价值:知识和方法的应用价值,知识探索或应用过程中的思维价值,学习过程中对于人的情感、态度、价值观形成的价值.只有这样,才能将知识、方法建构成体系,才能促进学科眼光、思维和思想的融合升华[3].两角和与差的正切公式是高中数学

三角函数知识网络中的重要节点,既是三角函数和平面向量知识的进一步延伸,又是学习二倍角公式等后继内容的基础,起着承上启下的重要作用.而无论是两角和与差的余弦、正弦公式,还是正切公式,都很难通过直觉猜测结论,一般只能通过逻辑推理获得正确的结果.因此,其获得研究思路和证明的过程往往是结合在一起的,而且在培养直观想象、逻辑推理等核心素养上是把握教材的重要体现.

(2)深入掌握学情是有效教学的保证.掌握学情包括教学对象的心理特点、知识基础、思想状态、思维方式、学习方法、学习态度等,要把学生置于教学的核心地位.教师应该以学生的心智发展为根本,深入了解学生现有的认知水平和情感状态,研究学生的发展需要,在准确把握学生的认知水平的基础上,确定教学目标和实施路径,预测教学过程中学生可能发生的认知困难并设计相应的策略.高一年级学生思维方式大都以初中经验型抽象逻辑思维为主,对常量、定量的计算较为熟练,而高中数学内容对理论型抽象逻辑思维能力要求较高,多研究变量、字母,不但注重定量计算,还注重理论分析,常常需要作定性的研究和说明.另外,许多学生的学习方式还未能适应高中阶段学习的特点,他们往往喜欢直接记忆相关的数学公式及性质,在解题中常常套用结论,却对结论的来源不求甚解,对知识方法的应用也不能自觉的进行变通和迁移.基于以上认识,从元认知理论出发,本节课的教学目标可作如下系统表述.

知识目标:

1.通过利用两角和与差的余弦公式对正弦、正切公式的探究,加强对和差角公式的认识.

2.熟悉推导两角和与差的正弦、正切公式的过程,体会三角变换的规律、技巧及代换法的作用.

3.学会公式的简单应用:正用、逆用与变形用.

能力目标:

1.通过对两角和与差的正弦、正切公式的探究和推导,提高学生逻辑推理能力.

2.通过公式的灵活应用,培养学生的方程思想和变换能力.

3.培养学生思维的有序性、表述的条理性和推理的严密性.

素养目标:

1.利用公式的推导过程,让学生体会知识事物间的内在联系.

2.培养学生用联系、变化的辨证唯物主义观点分析问题.

3.通过教师启发引导,重视数学核心素养的培养,重视培养学生求知精神和解决问题的能力.

4.通过对公式的观察对比,发现两角和与差的正弦、余弦、正切值与单角的三角函数值之间的和谐、轮换结构,让学生感受数学公式的自然美、抽象美.

2 从元认知视角把握教学进程与策略的切入点,构建生态教学进程

现代教学系统一般由教师、学生、教学内容、教学媒介、教学策略和教学评价等六个要素组成,各要素的运动变化具体表现为教学活动进程.教学活动进程是课堂教学设计的核心,教学目标、教学任务、教学对象的分析、教学媒介的应用、教学策略的选择等,都将在教学活动进程中得到具体体现[4].从元认知视角出发,要将诸多要素构建为有效的教学生态系统,我们应重点把握如下方面:

一是教学活动进程规划.教学活动进程是为实现教学目标而设计的,可以单一教学片段对应单或多个教学目标,也可以多个教学片段对应单或多个目标.从本节课的教学内容和学情分析来看,无论是两角和与差的余弦、正弦公式,还是正切公式,形式上都比较复杂,高一学生很难直观猜想到正确结论,一般只能通过逻辑推理获得正确的结果.因此,获得研究思路和证明过程是共生交织在一起的.现有的高中数学教材通过具有同化与形成意义的思考过程,依次提出求两角和与差的余弦、正弦、正切公式的问题,然后再进行相应的应用和变形训练,这样的进程安排符合学科教学内容的逻辑特点和学生学习认知发展的规律.

二是教学策略的制定.教学策略是为了实现教学目标,完成教学任务所采用的方法、步骤、媒介和组织形式等教学措施构成的综合性方案.其主要作用就是根据特定的教学条件和需要,制定出向学生提供教学信息、引导其活动的最佳方式、方法和步骤.在教学设计中注重观察力、联想能力的培养,从数学本质到学生认知特点,系统设计培养学生直觉想象、逻辑推理等方面的素养,从而有效提高学生发现问题、提出问题和解决问题的能

力. 因此，在教学引入阶段问题情境的创设上，应着重引导学生联想正切与余弦、正弦的同角三角函数关系，在两角和的余弦、正弦公式的基础上推导两角和的正切公式，并形成一系列的问题串，激发学生的探究兴趣，并通过小组合作等教学组织形式探究解决下列问题：

(1)正余弦之间如何转化，可否利用 $\cos(\alpha+\beta)$公式来推导 $\sin(\alpha+\beta)$的公式？

(2)$\sin(\alpha-\beta)$公式如何推导？你能用几种方法来推导？

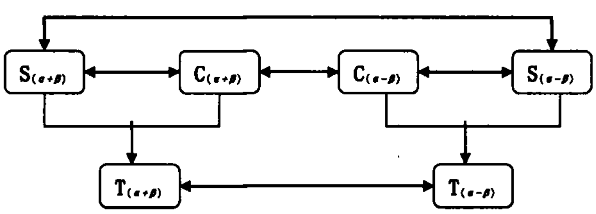
(3)$\tan(\alpha+\beta)$如何由 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 表示出来？使用切化弦能否解决此问题？

(4)你能推导出 $\tan(\alpha-\beta)$公式吗？有几种方法？

在得到两角和与差的正切公式后的新知巩固阶段，就应该引导学生厘清两角和与差的余弦、正弦、正切公式之间的逻辑联系，并通过适量的例习题训练加以强化巩固，然后应用适当的媒介对学习成果加以总结展示. 譬如板书就可以设计成如下形式：

<table>
<tr><td>公式与结论展示区</td><td rowspan="2">多媒体课件展示区</td><td rowspan="2">学生成果展示区</td></tr>
<tr><td>学生成果展示区</td></tr>
</table>

再把诸如两角和与差的正弦、余弦、正切共 6 个公式之间的逻辑联系框图在公式与结论展示区板书，学生典型的证明和解题方法在学生成果展示区展示，与多媒体展示区共同形成高效的视觉传递效果.（逻辑联系框图如下图所示）



三是课堂教学评价. 现代认知科学认为，“知识是不能被传递的，教师在课堂上传递的只是信息，知识必须通过学生主动建构才能获得”[6]. 学习就是一个不断打破原有的认知结构平衡发生同化或顺应组建新的认知结构达到新的平衡的过程，学生的数学学习可以看成是数学知识结构转化成学生认知结构的过程. 而课堂教学中适切而形式多样的评价能触及学生的认知边界，激发新旧认知结构和方式的冲突，引导学生调动学生在课堂学习过程中不断反省认识自我，在问题解决中调整、优化认知思维方式，是教学生态系统的重要活力源泉. 在此立场下我们对照梳理本节课的教学目标和进程，重点把握以下几个契机：

(1)在新知探究的问题情境，尤其是在探求 $\tan(\alpha+\beta)$与 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 的关系式环节，教师要对学生的思维过程和方式进行及时的评价，通过展示、对比和分析，促动学生回顾两角和与差的余弦、正弦等旧有公式的推导过程，把思维路径从通过个例盲目猜想调整到方法类比、函数转化的逻辑推理上来，为公式的获得证明寻找到较为有效的推演路径. 在总结性评价时，我们要引导学生厘清两角和与差的余弦、正弦、正切公式之间的逻辑结构关系，通过逻辑联系框图让学生认识到余弦和正弦公式之间本质上的关联；而由正切公式推导余弦和正弦公式理论上可行，实际上很困难(余弦、正弦、正切的同角三角函数关系比较复杂). 这样，教材的编写意图(“两角和与差的余弦公式”→“两角和与差的正弦公式” →“两角和与差的正切公式”)将一目了然.

(2)在公式获得证明之后，观察分析公式的特点时，要通过引导性的评价，一方面让学生从运算形式特征的角度观察总结，公式 $T_{\alpha\pm\beta}$ 涵盖了代数运算中最基本的和、差、积、商运算，且两者之间的加、减符号呈现了一定的对称结构，这样的对称特性源自于公式$S_{\alpha\pm\beta}$和$C_{\alpha\pm\beta}$的结构特征以及正切函数的奇偶性($\tan(-\beta)=-\tan(\beta)$). 另一方面让学生思考公式成立的必要条件，从关注 $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ 这一适用条件出发，证明 $\tan(\alpha+\beta)$有意义与 $\cos(\alpha+\beta)\neq0$ 及 $1-\tan\alpha\tan\beta\neq0$ 是等价的，这些过程中的观察、对照和调整是学生数学学科素养的基础生成点.

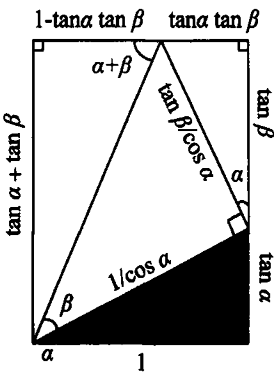
(3)在新知巩固的环节中，从代数式变形以及不同形式变量相互表示的角度，通过例习题的讲解训练引导学生发现，公式$T_{\alpha\pm\beta}$可以变成“角的正切的和、差或积等于角的和、差的正切”的形式，即 $\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$ 等，让学生体会数学公式运用的灵活性，激发学生敢于改变创新的勇气和热情.

3　从元认知视角探求学科素养与表征的结合点，存续教学内涵的价值

布卢姆说：“人们无法预料课堂教学所产生的成果的全部范围.”课堂教学系统构成的复杂性和因此带来的学生发展的多元性，其对学生的全方

位、深层次的影响不是完全以我们的主观意志为转移的. 但我们可以预见的是，课堂教学内涵的育人价值会在课外持续延伸. 从数学学习活动的结构来看，课堂教学仅仅是数学学习发生的一个起点或节点，由此产生的数学学习的需要和目的是其内涵的主要价值. 一方面，学习的需要决定了课堂教学情境的意义，对学生来说，这是课堂教学情境能否成为“长效刺激”，从而“产生”数学学科兴趣的关键. 另一方面，学习的目的是指引数学活动方向的决定性要素，两者共同作用形成了学生的数学学习动机. 两角和与差的正切公式的教学就是要通过三角公式的获得和证明，让学生发现看似纷繁复杂的代数式背后所蕴涵的对称美、逻辑美和方法美，从而产生持续学习数学的兴趣动机.

从数学学习活动的机制来看，任何数学学习活动都是对外部的信息结合内在的资源进行对比融合加工处理的过程. 这个过程包含信息的输入、加工、输出和反馈等环节. 其中，信息的输入——输出环节的基本功能是实现信息的变换，使外来信息得以接收、加工、储存和提取，这一环节的基本心理动作是各种形式与各种水平的编码与译码活动. 反馈环节的功能在于实现对数学学习的控制，通过回收输出信息的结果与原定目的进行对比，从而检验数学学习的成效，或者调节信息的再输入、再加工或再输出，最终使学习达到预期成效. 由此反观我们的数学课堂教学，教师就应该充分挖掘学科的育人内涵，通过课堂教学生态系统的构建，促动学生生成尽可能多的学科认知方面的方法和思维，为自身认知结构的扩充重组提供充足的养分. 教师应该鼓励学生从数学学科的整体联系来理解问题，在问题解决中不断监控、反思和调整解题策略，要经常激发学生自省设问：“我可以换一种方式看这个问题吗?”、“这个问题与我以前遇到的类似吗?”. 两角和与差的正切公式的证明是本节教学中的核心环节，在此环节学生除了通过切化弦这样的代数式变形证明公式，也会很自然地从正切的定义，即三角形或单位圆中的几何表示中寻找思路. 在此基础上，我们应该指出：证明两角差的余弦公式时，除了基于坐标表示的向量方法，人教版教材还给出了基于单位圆的几何方法；而同一个角的余弦、正弦和正切之间具有等价关系. 在学生认识到三角函数具有形（几何）和数（解析）双重表征的基础上，引导学生得出锐角两角和的正切公式的几何证明：锐角的正切是直角三角形中的两条直角边之比，从而拼接出如右图所示的四个直角三角形. 至此，学生体会了“数与形以及演绎”的知识整体联系，也进一步完善了头脑中的数学认知结构，为后续更高水平的学习打下良好的基础.



我们还可以设置课堂练习：已知 $\alpha,\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2+3\sqrt{3}x+4=0$ 的两根，求 $\alpha+\beta$. 这样的习题能进一步加深两角正切的和差 $\tan\alpha\pm\tan\beta$ 与其积 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$ 内在关联形式的理解，而且通过解的存在唯一性这样较有难度的问题解决，发展学生敢于质疑、善于反思和理性推证的学科核心素养，对哲学层面上思辨能力的提高具有积极意义.

基于元认知理论的数学教学有效性的实践，不仅能发挥学生主体作用，而且能通过核心问题的探究解决，培养学生积极进取的态度、理性思辨的能力和善于反思调控、勤于归纳总结的习惯，这也是以学生为本的教育理念的体现. 我们应该从元认知理论出发，深入研究学生数学认知结构、认知过程、认知策略的变化与数学学习的交互作用过程，更加深刻地认识数学学习中的心理机制问题，并以此在教学实践中寻求高中数学课堂教学有效性提升的着力点.

参考文献

[1] 王汉松. 布卢姆认知领域教育目标分类理论评析[J]. 南京师范大学学报(社会科学版)，2000(3)：67

[2] 皮连生、蔡维静. 超越布卢姆[J]. 华东师范大学学报(教育科学版)，2000(6)：40－41

[3] 陈静静. 课堂的困境与变革：从浅表学习到深度学习—基于对中小学生真实学习历程的长期考察[J]. 教育发展研究，2018(16)：27－30

[4] 涂荣豹. 数学解题学习中的元认知. 数学教育学报，2002(4)

[5] 张雅明. 元认知发展与教学 [M]. 芜湖：安徽师范大学出版社，2015

[6] 祁平，任子朝，陈昂，赵轩. 基于数学文化视角的命题研究[J]. 数学通报，2018，57(9)