月文科第21题简编）若 $g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，讨论 $h(x)=g(x)-t$ 在 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 的零点个数，等等．

参考文献

[1]任鑫．$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的简便作法[J]．中学数学教学，1996（1）：26

数学思想在高三复习课中的渗透

——利用距离公式解决一类最值问题

刘天程　　江苏省常州市北郊高级中学（213031）

数形结合是一个数学思想方法，包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面，其应用大致可以分为两种情形：或者是借助形的生动和直观性来阐明数之间的联系，即以形作为手段，数为目的，比如应用函数的图象来直观地说明函数的性质；或者是借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性，即以数作为手段，形作为目的，如应用曲线的方程来精确地阐明曲线的几何性质．

等价转化是把未知解的问题转化到在已有知识范围内可解的问题的一种重要的思想方法．通过不断的转化，把不熟悉、不规范、复杂的问题转化为熟悉、规范甚至模式法、简单的问题．历年高考，等价转化思想无处不见，我们要不断培养和训练自觉的转化意识，将有利于强化解决数学问题中的应变能力，提高思维能力和技能、技巧．

高三二轮复习课应立足数学思想方法进行展开，让学生感受充满数学思想方法的课堂．因为数学思想是数学的灵魂，是数学的精髓所在．是高中数学学习提升的最终层次．数学思想方法主要有：函数与方程思想；化归思想；分类讨论思想；数形结合思想等，而数形结合和思想又是初等数学的重点，更是难点．在平时教学中应如何渗透这些思想，笔者根据自己教学积累，探究一节一法解多题的数形结合之一撇的课堂，以常见的平方和形式求最值的多变量问题进行探究，总结出解决这一类问题的方法．

1 问题呈现，经典回顾

已知 $\begin{cases}x-y+2\ge 0,\\ x+y-4\ge 0,\\ 2x-y-5\le 0,\end{cases}$ 求 $z=x^2-10x+y^2+25$ 的最小值．

解析 本题是线性规划中常见的题型转化成直角坐标系中可行域内一动点 (x,y) 与定点 $(5,0)$ 的距离平方的最小值，借助这一方法来研究一类 $z=(a-x)^2+(b-y)^2$ 的最值，让学生感受定点与动点的距离产生问题．

2 问题牵引，探究本质

活动1 用几何法求函数 $y=|x-2|-|x-1|$ 的值域．

注 借助绝对值的几何意义利用数轴来研究一维空间中的距离问题，先让学生感受，再利用几何画板展示，让学生清楚感受定点与动点的距离关系．答案：$[-1,1]$．

活动2 求 $y=\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-4x+5}$ 的值域．

注 让学生尝试将问题转化成定点与动点的距离关系，把代数式化简成：

$y=\sqrt{(x-1)^2+1}+\sqrt{(x-2)^2+1}$ 转化成二维直角坐标系中 $(x,0)$ 与 $(1,1)$，$(2,1)$ 的距离之和，利用对称关系及三角形两边之和大于第三边得到结果，借助几何画板演示．答案：$[\sqrt{5},+\infty)$．

3 领悟拓展，触类旁通

以上主要两种形式：

①$|x|$ 在一维空间（数轴）上表示数轴上的动点到原点的距离；

②$(x-a)^2+(y-b)^2$ 在二维空间（平面直角坐标系）上的点 (x,y) 到点 (a,b) 的距离的平方．

当遇到绝对值和平方和形式的最值问题变量多难入手时引导学生想到两点间距离，在研究这两点的可行域即可得到最值，一般步骤：①转化成点的距离；②研究点的可行域；③求最值．

例1 已知 $2a+b=2$，求 a^2+2a+b^2+2b 的最小

值．

分析 代数式可转化 $a^2+2a+b^2+2b=(a+1)^2+(b+1)^2-2$，不难想到 (a,b) 与 $(-1,-1)$ 的距离关系，由点 (a,b) 在直线 $2a+b=2$ 上，转化成 $(-1,-1)$ 与直线的距离最小，再利用点到线的距离公式求出．答案：3．

变式 关于 x 的方程 $x^2+ax+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}+b=0$ 有实根则求 a^2+b^2 最小值．

分析 利用以上方法将 a^2+b^2 转化成定点 $(0,0)$ 与动点 (a,b) 距离的最小值，那么 (a,b) 动点的轨迹是什么呢，由例 1 可知若给定一个 x 的值它的轨迹是一条直线，它是个直线系，那么最小值仍是 $(0,0)$ 到直线的距离，而这个距离又关于 x 的函数：$d=\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2+1}}=\frac{(x+\frac{1}{x})^2-2}{\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2+1}}$，再利用换元法，令 $t=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2+1}\geq\sqrt{5}$，$d=\frac{t^2-3}{t}=t-\frac{3}{t}$，答案：$\frac{4}{5}$．本题另一个难点是转化后主元问题，在一个方程或函数不等式里出现多个字母时首先选择以哪个字母作为主元，围绕这一点可以再探究方程和不等式主元的选择进行“围点打援，触类旁通”．

例 2 已知满足 $a+2b+4=0$，$x+2y=1$，求 $z=(a-x)^2+(b-y)^2$ 的取值范围．

分析 以上问题都是转化成一动点与定点的距离，再研究动点轨迹与定点的关系，本题是两动点的关系，不难看出两动点在两条平行线上，转化成平行线上两点距离．答案：$[5,+\infty)$．

变式 若实数 a，b，c，d，满足 $\frac{a^2-2\ln a}{b}=\frac{3c-4}{d}=1$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值．

分析 所求代数式依然转化为两动点的距离平方，(a,b) 在函数 $y=x^2-2\ln x(x>0)$ 上，(c,d) 在 $y=3x-4$ 上，函数与直线上点的最小距离，利用与该直线平行的直线与函数相切，最小时是切点到直线的距离．研究出函数 $y=x^2-2\ln x(x>0)$ 的大致图象，在 $(0,1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增，与斜率为 3 的直线相切于 $(2,4-\ln 4)$，最小值为 $(2,4-\ln 4)$ 与直线 $y=3x-4$ 距离的平方．答案：$\frac{2}{5}\ln^2\frac{e}{2}$．

已知 $f(a,b)=0$，$g(x,y)=0$，求 $z=(a-x)^2+(b-y)^2$ 的取值范围，分别研究 (a,b) 与 (x,y) 的轨迹，研究轨迹上点与点的距离．距离有一维的数轴上的；也有二维点与点，线与点的距离，学习时注意知识的拓展，触类旁通．善于发现积累总结代数式的几何意义，如课后去思考：已知 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$，求 $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$ 的范围；几何法虽然简单但解决大题目时是没有说服力的，大题目还是提倡代数方法．通过这一节课让学生意识并掌握了这一类最值问题的解决方法，复习中要善于发现积累学生的难点或教学难点进行集中训练加强巩固切忌没有重点或眉毛胡子都抓不到的课堂．

数形结合的思想，其实质是将抽象的数学语言与直观的图象结合起来，关键是代数问题与图形之间的相互转化，它可以使代数问题几何化，几何问题代数化．

在运用数形结合思想分析和解决问题时，要注意三点：第一要彻底明白一些概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征，对数学题目中的条件和结论既分析其几何意义又分析其代数意义；第二是恰当设参、合理用参，建立关系，由数思形，以形想数，做好数形转化；第三是正确确定参数的取值范围．

恩格斯曾说过：“数学是研究现实世界的量的关系与空间形式的科学．”数形结合就是根据数学问题的条件和结论之间的内在联系，既分析其代数意义，又揭示其几何直观，使数量关的精确刻画与空间形式的直观形象巧妙、和谐地结合在一起，充分利用这种结合，寻找解题思路，使问题化难为易、化繁为简，从而得到解决．

华罗庚先生说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休．”数学结合的应用往往伴随着化归思想即等价转化思想的产生，使数和形之间达到转化．在二轮复习中应渗透这样函数思想形成通法．

古语有云：授之以鱼，只供一饭之需，授之以渔，则一生受用．