

# HPM 与 MM 教育方式的耦合初探<sup>①</sup>

——兼谈当代中国数学教育流派

刘祖希<sup>1</sup> 陈 飞<sup>2</sup>

(1. 华东师范大学出版社 200062; 2. 贵州省习水县第一中学 564600)

基于“当代中国数学教育史”的研究假设,在“当代中国数学教育流派”<sup>[1-3]</sup>课题研究过程中,我们发现:HPM与MM教育方式是当代中国颇具特色的两个数学教育研究领域(或流派<sup>[4]</sup>),它们有许多共同点——都是外来的、经中国化后迅猛发展,都是基于数学学科本身建立和发展的,值得我们开展比较与耦合研究。

2016年5月17日,习近平总书记在哲学社会科学工作座谈会上的讲话中指出“不忘本来、吸收外来、面向未来”,这为我们提供了一个重要研究理念与思路.我们讨论HPM与MM教育方式的起源、中国化历程及其发展,讨论HPM与MM教育方式在基本立场、研究内容、教学设计与实施方法、促进教师专业发展、理论框架模式与研究方法等方面的耦合,为“当代中国数学教育史”添砖加瓦。

## 1 HPM及其中国化

我们先论述HPM及其中国化。

### 1.1 HPM简介

HPM是History and Pedagogy of Mathematics(数学史与数学教育)的简称,就是利用数学史来促进数学教育.谈起HPM,要追溯到1758年,这一年法国数学家蒙蒂克拉出版了专著《数学史》,标志着数学史作为一门独立研究领域的出现.1968年,荷兰数学家弗赖登塔尔主持召开第一次国际数学教育大会(ICME-1),标志着现代数学教育成为一个独立学科.数学史和数学教育这两个学科分别建立后,越来越多的数学家、数学史家、数学教育家看到了数学史对数学教育的作

用.1972年,第二届国际数学教育大会(ICME-2)在英国埃克赛特举办,在这次大会上成立了数学史与数学关系国际领导小组,标志着HPM作为一个研究领域的正式出现。

张奠宙教授在国内较早引入HPM研究,他于1998年去法国马赛参加HPM会议后撰文呼吁,要重视科学史在科学教育中的应用,在国内第一次介绍了HPM这个术语.自20世纪末到今天,我国大陆对于HPM的研究热情空前高涨,达到了一个前所未有的高度.<sup>[5]</sup>

我国HPM研究的学术团体是“全国数学史学会”(即中国数学会数学史分会、中国科学技术史学会数学史专业委员会),成立于1981年7月.该学会是中国数学会、中国科学技术史学会的二级学会,并于1998年10月成立数学史教育工作小组.我国HPM研究的学术会议是“全国数学史与数学教育研讨会”,由“全国数学史学会”举办,至今已经举办了8届,具体情况见表1.另外,华东师大汪晓勤教授创办的“上海HPM教学研讨会”,从2014年至今已举办了7届。

表1 历届全国数学史与数学教育研讨会

年份	届次	举办地点
2005	1	西北大学
2007	2	河北师范大学
2009	3	北京师范大学
2011	4	华东师范大学
2013	5	海南师范大学

① 本文根据全国第12届数学方法论与数学教育学术研讨会(无锡)的大会报告整理而成。

续表

年份	届次	举办地点
2015	6	中山大学
2017	7	辽宁师范大学
2019	8	上海交通大学

## 1.2 HPM 的研究内容

HPM 的研究内容是什么? 我国学者进行了深入的研究. 汪晓勤教授认为 HPM 研究的内容包括(但不限于):

(1) 数学教育取向的数学史研究. 一般数学史家的数学通史和数学专题史著作都不是中学数学教学所学的历史, 我们所需要的是诸如集合的历史、函数的历史、数列的历史等. 这就需要教育取向的数学史研究, 汪晓勤教授的《中学数学中的数学史》<sup>[6]</sup>就是教育取向数学史研究. 在 2005 年第一届全国数学史与数学教育会议上, 李文林教授提出“数学史应该为数学教育而历史”, 宋乃庆教授提出“应将数学史的史学形态转化为教育形态”. 我们认为, “数学教育史则更加要为数学教育而历史”.

(2) 基于数学史的教学设计. 基于数学史的视角数学内容进行教学设计, 可以直接使用进行课堂教学, 也为如何基于数学史进行教学设计提供了方法.

(3) 历史相似性研究. 学生对许多数学概念、问题的困惑和理解, 与数学史上数学家的困惑和理解是相似的, 历史发生原理是相似的.

(4) 历史知识在课堂中的应用. 数学史融入数学教学的研究是数学教学的重要组成部分, 是 HPM 领域的重要方向之一. 数学史在数学教学中的运用通常有 3 种途径, 一是提供直接的历史信息, 二是借鉴历史进行教学, 三是开发对数学及其社会文化背景的深刻觉悟. 其中第二种方式就是发生教学法, 通常所说的 HPM 视角下的数学教学采用的主要就是这种方法.<sup>[7]</sup>当前, 关于“发生教学法”的研究成果和案例也有很多.<sup>[8]</sup>

## 2 中国的 MM 教育方式

我们再论述中国的 MM 教育方式.

### 2.1 数学方法论简介

我们先介绍数学方法论.

马克思曾指出, 一门科学只有当它在成功地应用了数学(的思想方法)之后才臻于完善, 也就是说科学的成熟与否要视其应用数学的程度而定. 既然数学教育是一门科学, 那么, 数学教师为什么就不能应用数学本身的思想方法来组织数学教学呢? 现代数学教育尽管成功地运用了现代教育学、心理学、生理学、认知科学以及脑科学等研究成果, 但它忽略了运用数学本身的思想方法, 即数学方法论(Mathematical Methodology, 简称 MM)对其的指导作用. 事实上, 数学在其自身的发展过程中也成功地孕育着、体现出上述诸多科学的客观规律.<sup>[9]</sup>

国际上, 早在 20 世纪 30—40 年代, 美籍匈牙利数学家、数学教育家乔治·波利亚(George Polya, 1887—1985)就尝试着把“数学方法论”应用于数学教学. 他的成功实践为中学数学思想方法的教学提供了理论模式.

在国内, 20 世纪 80 年代初期, 数学家徐利治先生就高瞻远瞩地率先倡导人们用数学方法论和波利亚的数学教育思想指导数学教学, 并出版了一系列关于数学方法论的专著. 徐利治先生还提出了研究波利亚的两项重要任务: “我们要培养和造就一批波利亚型的数学工作者, 要按照波利亚的思想改革数学教材和教学方法.”

关于“数学方法论”, 徐利治先生本人有如下论述:<sup>[10]</sup>大家知道, 历史上早就有哲学方法学, 近现代还兴起了科学方法学, 又称“科学学”. 事实上, 每门学科都有它的方法论, 数学也不例外. 由于数学既是一种研究一切科学的强有力的工具, 又是一门深深地影响着人们文化素质的重要学科, 所以数学方法论居于一个特别重要的位置. 那么, 首先要问, 什么是数学方法论? 研究它的目的是什么?

《数学方法论选讲》(第 1 版)<sup>[11]</sup>一书中提出, 数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问. 此说法可视为关于数学方法论的一个素朴定义. 现在看来, 此定义仍然适用. 国内一些研究方法论的学者也采纳了这个素朴定义.

只要同意上述说法, 就不难回答为什么要研究数学方法论这个问题了, 简单地讲, 学习和研究数学方法论的目的无非是为了正确地认识数学,

有效地运用数学以及很好地发展数学.

我国数学方法论研究的学术团体是“全国数学科学方法论研究交流中心”,成立于2001年8月.该中心是中国自然辩证法研究会数学哲学专业委员会的分支机构,由徐利治教授、王梓坤院士等著名数学家倡议成立,徐利治教授、林夏水研究员历任中心主任.我国数学方法论研究的学术会议是“全国数学方法论与数学教育学术研讨会”,由“数学科学方法论研究交流中心”举办,至今已经举办了12届,具体情况见表2.

表2 历届全国数学方法论与数学教育学术研讨会

年份	届次	举办地点
1989	1	首都师大
1993	2	上海
1995	3	襄阳师专
1997	4	武汉教育学院
1999	5	天津师大
2002	6	山东教育学院
2004	7	天水师院
2006	8	新疆师大、昌吉
2008	9	成都西南交大
2009	10	江苏无锡
2012	11	贵州兴义
2019	12	江苏无锡

## 2.2 MM教育方式简介

在徐利治先生影响之下,我国的中小学层面诞生了MM教育方式.所谓MM教育方式就是指运用数学本身的思想方法指导数学教学和数学教学改革的数学教育方式.<sup>[9]</sup>

MM教育实验是其中比较典型的一种MM教育方式.1989年9月,MM教育实验首先在无锡市高中阶段展开,并在1994年5月顺利通过包括王梓坤院士、张奠宙教授在内的专家组鉴定,此后30年边实验边推广,其实验点和实验研究合作单位已扩展到我国包括台湾地区在内的几乎所有省市自治区,其实验学校也从原来的普通高中、职业学校扩展到小学、大学和成人教育等各级各类学校.实验结果表明,学生的整体素质明显提高,同时也培养了一批既能胜任教学又能从事科研的

数学教师.<sup>[12]</sup>

MM实验给出的MM教育方式是:教师在数学教学的全过程中,充分发挥数学教育的2个功能(技术教育功能和文化教育功能);自觉地遵循2条基本原则(既教证明又教猜想的原则和教学、学习、研究(发现)同步协调原则);瞄准3项具体目标(引导学生自我增进一般科学素养,自我提高社会文化修养,自我形成和发展数学品质);恰当地运用8项教学措施(数学返璞归真教育,数学审美教育,数学发现法教育,数学家优秀品质教育,数学史志教育,演绎推理教学,合情推理教学,一般解题方法的教学),从而达到全面提高学生素质的目的.

## 2.3 数学思想方法从“双基”走向“三基”、“四基”

三十年来,MM教育方式思想以及在数学教学中渗透数学思想方法已经成为中国数学教育的常识.数学思想方法也在1992年正式纳入义务教育数学教学大纲,拓展了数学“双基”中“基础知识”的内容,并延续至2000年初、高中数学教学大纲;后写进1998年版上海市数学课程标准、2002年版高中数学大纲,成为数学“双基”中“基础知识”、“基本技能”所包括的内容;随后写进2003年版高中数学课程标准,成为了数学“三基”中的一基:基本数学思想(“三基”的提法很短暂,容易被人忽视);进而又写进2011年修订版义务教育数学课程标准,成为了数学“四基”中的一基:基本数学思想(抽象、推理、模型,由史宁中教授提出).<sup>[13]</sup>

2017年修订版高中数学课程标准延续了“四基”的提法,并提出了“数学核心素养”体系,数学基本思想(抽象、推理、模型)成为“数学核心素养”体系的“基底”.<sup>[14]</sup>

## 3 HPM与MM教育方式的耦合

我们论述HPM与MM教育方式的耦合.

### 3.1 基本立场的耦合

HPM的基本立场是数学史对数学教学有十分重要的意义,如果数学教学缺乏历史的观点,那么就会减少数学的教育价值.

MM教育方式的基本立场是运用数学本身的思想方法指导数学教学及其改革.

无论是HPM还是MM教育方式,对于数学教学,两者的基本立场、出发点都是“数学及其发

展规律”(其中,数学史是显性的数学,数学思想方法是隐性的数学,依据18世纪德国大文豪歌德的观点:一门学科的历史就是这门学科本身,数学史甚至就是数学本身),而非“教育学”抑或“心理学”的.这个基本立场的耦合,保障了两者的研究方向不会偏离数学教育的正确轨道,并有利于克服当前数学教学(特别是低年级)中的“去数学化”等不良倾向,数学教学归根结底是教数学、培养学生的数学(核心)素养.

与之形成鲜明对别的是,在20种比较“经典”的中学数学教学方法中,明确指出数学教学关注数学史的寥寥无几(仅有“讲授教学法”“情境教学法”“MM教学法”等).<sup>[15]</sup>

当然,HPM与MM教育方式都不否认“教育学”抑或“心理学”的价值(我国台湾学者洪万生似有HPM与PME结合的研究),郑毓信教授指出:数学教育的基本矛盾是“数学方面”与“教育方面”的对立统一,前者是指数学教育应当正确地体现数学的本质,后者则是指数学教育应当充分体现教育的社会目标并符合教育的规律.<sup>[16]</sup>

### 3.2 研究内容的耦合

HPM研究的基本内容是数学教育取向的数学史、数学历史相似性,以及运用它们促进学生对数学、发展思维.

MM教育方式研究的基本内容是运用2条基本原则(既教证明又教猜想的原则和教学、学习、研究(发现)同步协调原则),实现3项具体目标(引导学生自我增进一般科学素养,自我提高社会文化修养,自我形成和发展数学品质).

无论是HPM还是MM教育方式,两者的研究内容都包括:让学生在数学学习的过程中,了解数学发生、发现、发明的本来过程,体验数学家的思考过程,体验数学知识蕴含的数学思想方法,从而帮助学生建立自己对数学的理解与认识、提升数学思维能力(数学素养).从这个意义上看,两者也都是数学文化研究的重要内容.

### 3.3 教学设计与实施方法的耦合

汪晓勤教授指出,基于HPM的数学教学应该遵循以下5项原则:趣味性、科学性、有效性、可学性、新颖性,从而实现数学教学的6大价值:知识之谐、方法之美、探究之乐、文化之魅、能力之助、德育之效.

MM教育方式的8项教学措施是:数学返璞归真教育,数学审美教育,数学发现法教育,数学家优秀品质教育,数学史志教育,演绎推理教学,合情推理教学,一般解题方法的教学.

基于HPM与MM教育方式的数学教学设计与实施,都注重恰当地引入数学史料,激发学生的学习兴趣,引导学生感悟数学的魅力,引导学生运用合情推理、逻辑推理等方法进行数学探究,培养学生的数学(核心)素养,锻炼学生的人格品质.而且,两者都不排斥其他的教学方法,总是与其他的教学方法联合推进数学教学.

### 3.4 数学教师专业发展上的耦合

许多关于“数学学科教学知识(MPCK)”、“教学取向的数学知识(MKT)”的研究佐证了HPM与MM教育方式对数学教师专业发展的促进作用.

我们认为,能胜任HPM与MM教育方式的教师需要具备较高的数学(包括数学史)素养和教学素养.教师站稳讲台之后,HPM与MM教育方式会促使他们站到数学教育最前沿,自觉地开展数学教育研究、提升自身的数学素养和教学素养,做科研型的教师.他们对数学的理解,对数学史的了解、理解,对数学思想方法的掌握,都要远胜于其他教师.

而且,相对于其他教师,从事HPM与MM教育方式研究的科研型教师在教学、研究上所做的超常投入和奉献、所取得的不凡成绩,本身就会激励学生,成为HPM与MM教育方式的现实案例.

### 3.5 理论框架模式与研究方法的耦合

HPM与MM教育方式的理论框架模式与研究方法也有耦合之处.

在2011年第四届全国数学史与数学教育会议上,张莫宙教授对我国HPM研究提出了构建“一副理论框架”的建议.现在,汪晓勤教授给出了中国HPM理论框架:1个视角(在HPM视角下进行教学)、2座桥梁(数学与人文、历史与现实这两座桥梁)、3维目标(知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观)、4种形式(附加式、复制式、顺应式、重构式)、5项原则(趣味性、科学性、可学性、有效性、新颖性)、6大价值(知识之谐、方法之美、探究之乐、文化之魅、能力之助、德育之效),这是一个六维框架,可用“一二三四五六”来概括,见图1.

(下转第49页)

而圆的半径为 $\frac{l}{2\pi}$ ,那么圆的面积就是 $\pi \cdot \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 = \frac{l^2}{4\pi}$ ,显然, $\frac{l^2}{16} < \frac{l^2}{4\pi}$ ,所以圆的面积大于正方形的面积,因此,周长一定时,圆的面积最大.

直观想象是数学思维的重要形式,需要借助

空间想象感知事物的形态与变化.学生的操作与体验为建立空间想象提供了物质基础,教学中,教师研究并科学开展数学实验活动,是培养提升学生几何直观与空间想象观念的有效手段,可以大力提升学生的数学核心素养.

(上接第34页)

MM实验给出的MM教育方式理论框架是:1个方法、2个功能、2条基本原则、3项具体目标、8项教学措施,可用“一二二三八”来概括,见图1.



图1 HPM与MM教育方式理论框架图

不难看出,HPM与MM教育方式的理论框架模式构建均采用了思辨为主、实证为辅的方式,“我们常常称道国外数学教育研究使用的实证方法,用数据说话.但是,高水平的数学教育研究,也需要高屋建瓴地,借助科学进步作深层次的论说.”<sup>[17]</sup>

HPM与MM教育方式的理论框架模式构建后,两者的研究重心都逐渐转入课堂教学,散发源源不断的教学生命力,即先做理论研究,再做实证研究,并逐步完善理论框架,这是两者研究方法上的耦合.

#### 4 结语

无论何种数学教育方式都不能脱离“数学”这个核心、不能脱离“培养学生的数学(核心)素养”这个基本立场,这正是HPM与MM教育方式两者生命力长久之所在,其成果之花才会持续绽放.<sup>[18][19]</sup>中国对HPM的贡献、对MM教育方式的创建,增强了中国数学教育研究的理论自信.

HPM与MM教育方式的耦合、相互促进有待继续探索,以期它们成为名副其实的当代中国数学教育流派贡献更多实证.

#### 参考文献

- [1]刘祖希.当代中国数学教育流派刍议[J].上海中学数学,2014,(Z1):93-96
- [2]刘祖希.当代中国数学教育流派刍议[J].高中数学教与学(人大复印报刊资料),2014,5:3-6
- [3]新青年数学教师工作室.当代中国数学教育流派(新青年教师文库)[M].上海:上海教育出版社,2014
- [4]徐章韬.面向研究生教育的专业建设之路探微[J].数学教育学报,2016,3:48-51
- [5]刘超,等.数学史与数学教育[M].杭州:浙江大学出版社,2013:42
- [6]汪晓勤,韩祥林.中学数学中的数学史[M].北京:科学出版社,2002
- [7]汪晓勤等.HPM视角下的数学教学设计:以椭圆为例[J].数学教育学报,2011,5:20-23
- [8]徐章韬,汪晓勤,梅全雄.发生教学法:从历史到课堂[J].数学教育学报,2010,1:10-12
- [9]王名扬,徐沥泉,胡建庭.MM课题在无锡的简要回顾和现状[J].中学数学,2006,7:1-3
- [10]徐利治.徐利治谈数学方法论[M].大连:大连理工大学出版社,2008
- [11]徐利治.数学方法论选讲[M].武汉:华中工学院出版社,1983
- [12]徐沥泉主编.教学·研究·发现——MM方式演绎[M].北京:科学出版社,2004
- [13]刘祖希.当代中国数学家对数学教育内容创新的贡献[J].中学数学杂志,2016,1:3-6
- [14]刘祖希.访史宁中教授:谈数学基本思想、数学核心素养等问题[J].数学通报,2017,5:1-5
- [15]涂荣豹,宁连华.中学数学经典教学方法[M].福州:福建教育出版社,2011
- [16]郑毓信.数学教育哲学[M].成都:四川教育出版社,1995
- [17][美]A.斯梯恩.关于数学推理的20个问题[J].数学教学,2015,(6):2(编者按)
- [18]汪晓勤.HPM:数学史与数学教育[M].北京:科学出版社,2017
- [19]陈江辉.MM方式三十年数学贯通丛书[M].江苏教育出版社,2019