

【真题感悟】

1. (2015·北京改编)如图,函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB ,则不等式 $f(x) \geq \log_2(x+1)$ 的解集是_____.

2. (2016·北京)设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a, \\ -2x, & x > a. \end{cases}$ 若 $a=0$,

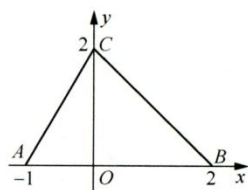
则 $f(x)$ 的最大值为_____.

拓展:(2016·北京)设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a, \\ -2x, & x > a. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 无最

大值,则实数 a 的取值范围是_____.

3. (2014·新课标Ⅱ)设点 $M(x_0, 1)$,若在圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 上存在点 N ,使得 $\angle OMN = 45^\circ$,则 x_0 的取值范围是_____.

4. (2018·浙江改编)已知 a, b, e 是平面向量, e 是单位向量.若非零向量 a 与 e 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,向量 b 满足 $b^2 - 4e \cdot b + 3 = 0$,则 $|a - b|$ 的最小值是_____.



(第1题图)

【考点展示】

1. 已知函数 $f(x)$ 满足关系:① $f(x+1) = f(x-1)$;② 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = x^2$,则方程 $f(x) = \lg x$ 解的个数是_____.

2. 已知不等式 $x^2 + ax - 2a^2 < 0$ 的解集为 P ,不等式 $|x+1| < 3$ 的解集为 Q ,若 $P \subseteq Q$,则实数 a 的取值范围为_____.

3. 已知 P 是直线 $l: 3x + 4y + 8 = 0$ 上的动点, PA, PB 是圆 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 的两条切线, A, B 是切点, C 是圆心,则四边形 $PACB$ 面积的最小值为_____.

4. 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1 > x_2)$ 是函数 $f(x) = x^3 - |x|$ 图象上的两个不同点,且在 A, B 两点处的切线互相平行,则 $\frac{x_2}{x_1}$ 的取值范围为_____.

5. 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{2}$ 与圆 $C: (x - \sqrt{3})^2 + (y - 1)^2 = 3$ 交于 A, B 两点,则直线 AC 与 BC 的倾斜角之和为_____.

6. 已知点 $P(x, y)$ 的坐标 x, y 满足 $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0, \\ |x| - y - 1 \leq 0, \end{cases}$ 则 $x^2 + y^2 - 6x + 9$ 的取值范围是_____.

【典题导引】

例1 (数形结合解决有明显几何意义的式子(概念)问题)

(1) 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{1 - (x-2)^2} + 3}{x+1}$ 的值域为_____.

(2) 若实数 x, y 满足条件 $x^2 - y^2 = 1$,则 $u = \frac{1}{x^2} + \frac{2y}{x}$ 的取值范围是_____.

(3) $y = (\cos \theta - \cos \alpha + 3)^2 + (\sin \theta - \sin \alpha - 2)^2$ 的最大值为_____.

(4) 若实数 a, b, c, d 满足 $\frac{a^2 - 2\ln a}{b} = \frac{3c - 4}{d} = 1$, 则 $u = (a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为_____.

(5) (2015·泰州一模) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\angle B = \angle C$ 且 $7a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

例 2 (数形结合解决隐含轨迹问题)

(1) 已知 $\vec{OB} = (2, 0)$, $\vec{OC} = (2, 2)$, $\vec{CA} = (\sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$ ($0 \leq \alpha < 2\pi$), 则 \vec{OA} 与 \vec{OB} 的夹角的取值范围为_____.

(2) 已知 $A(2\cos\alpha, \sqrt{3}\sin\alpha)$, $B(2\cos\beta, \sqrt{3}\sin\beta)$, $C(-1, 0)$ 是平面上三个不同的点, 若存在实数 λ , 使得 $\vec{CA} = \lambda \vec{BC}$, 则 λ 的取值范围是_____.

(3) 设 D 是等腰 $\triangle ABC$ 腰 AC 的中点, 若 $BD = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.

例 3 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2ex + m - 1$, $g(x) = x + \frac{e^2}{x}$ ($x > 0$), 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 若函数 $h(x) = g(x) - m$ 有零点, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若关于 x 的方程 $g(x) - f(x) = 0$ 有两个相异实根, 求实数 m 的取值范围.

例 4 (2018·上海改编) 已知实数 x_1, x_2, y_1, y_2 满足: $x_1^2 + y_1^2 = 1, x_2^2 + y_2^2 = 1, x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{1}{2}$,

求 $\frac{|x_1 + y_1 - 1|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 1|}{\sqrt{2}}$ 的最大值.