高中数学概念建构教学路径探寻
——以“双曲线的定义及标准方程”教学为例

陈云明
江苏省宜兴市张渚高级中学 214200

[摘 要] 概念教学应力求学生抓住概念的本质,理解概念的内涵,掌握概念的应用,进而培养学生分析问题和解决问题的能力. 以“双曲线的定义及标准方程”教学为例,提出概念教学的基本路径,以促进学生对双曲线概念和标准方程的深刻理解,帮助学生掌握数学的基本方法,建立数学的基本思想,进而培养学生分析问题、解决问题的能力.

[关键词] 双曲线;定义;标准方程;高中数学

概念教学应力求学生抓住概念的本质,理解概念的内涵,掌握概念的应用,进而培养学生分析问题和解决问题的能力. 数学问题解决的实质总依附于对概念的理解和性质的掌握. 在概念教学中,教师应精心设计概念的教学过程,充分挖掘概念的内涵与外延,把学生从题海战术中解放出来,进而达到事半功倍、提高课堂教学的效果.笔者以“双曲线的定义及标准方程”教学为例,注重知识的发生、发展过程,建立知识之间的内在联系,促进学生对双曲线概念和标准方程的深刻理解,帮助学生掌握数学的基本方法,建立数学的基本思想,进而达到培养学生分析问题、解决问题的能力.

通过类比对概念进行教学,培养学生的学习能力

“类比是伟大的引路人”. 研究双曲线的概念可以与椭圆的概念联系起来.由于学生对椭圆概念已有理性认识的基础,因此在研究双曲线时,教师可以从复习椭圆入手,这不仅有利于学生在已有认知的基础上引入双曲线概念的学习,而且还可以培养学生通过对问题的类比,达到提升学生自我学习、自我发展的能力[1].

师:椭圆的定义是什么?用数学式对其表示.

生1:在平面内,与两个定点F_1,F_2的距离之和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作椭圆.

生2:用数学式可以表示为$|PF_1|+|PF_2|=$常数$>|F_1F_2|$.

师:椭圆的标准方程是什么?并说明a,b,c的关系.

生3:焦点在x轴上,椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;焦点在$y$轴上,椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$;且有$a^2=b^2+c^2$.

师:在平面内,动点P到两定点F_1,F_2的距离之差的绝对值等于常数的轨迹是什么?

最后一个问题的抛出,给了学生一个悬念,满足了学生对问题的好奇心,学生对椭圆进行分类讨论,不仅使双曲线概念的研究有了一个好的开端,而且还渗透了分类讨论数学思想.

通过对概念教学的过程设计,培养学生的思维品质

数学概念并不是凭空产生的,教师可以通过对概念教学的过程设计,引导学生认知概念,并把握概念的内涵与外延[2].

比如,在双曲线概念教学中,教师首先提出问题:双曲线是如何形成的?并让学生进行图形演示,让学生从图形演示中形象直观地感悟双曲线的概念:平面内,与两个定点F_1,F_2的距离之差的

作者简介:陈云明(1986—),本科学历,中学一级教师,主要从事高中数学教学与研究工作.

万方数据

绝对值等于常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作双曲线. 定点F_1,F_2叫作双曲线的焦点,F_1,F_2之间的距离叫作双曲线的焦距.

让学生自己参与图形演示,调动了学生学习数学的积极性,激发了学生学习数学的热情;通过对图形的观察,总结有关的性质,培养了学生数形结合数学思想,为更好地掌握知识、理解知识、培养能力创造了条件. 其次,教师引导学生加强对概念中的关键词句的理解,在培养学生发散思维、逆向思维的同时培养学生的研究能力.

对“$|PF_1|-|PF_2|$=常数”中的“常数”进行讨论:

(1)当常数大于0且小于$|F_1F_2|$时,点P的轨迹是双曲线的右支;

(2)当常数小于0且大于$-|F_1F_2|$时,点P的轨迹是双曲线的左支;

(3)当常数等于0,即$|PF_1|-|PF_2|=0$时,点P的轨迹是线段F_1F_2的垂直平分线;

(4)当常数等于$|F_1F_2|$时,点P的轨迹是分别以F_1,F_2为端点的两条射线.

(5)当0<常数<$|F_1F_2|$时,点P的轨迹是什么?——给学生一个思考的空间.

概念教学不仅需要重视阅读概念,而且概念中有本质特征的关键词句也需要让学生反复琢磨,仔细品味,认真思考,要深刻理解其语意,并不时地提出一些反问. 例如,换成其他词语行吗?省略某某字行吗?(去掉“在平面内”,点P的轨迹是一几何体;去掉“绝对值”,点P的轨迹是双曲线的一支)加上某某字行吗?等等.要读出书中的要点、难点和疑点,读出字里行间所蕴藏的内容,读出从概念中提炼的数学思想、观点和方法,从而使学生能准确地掌握概念的内涵和外延,提高课堂实效,培养学生的思维品质.

⑤在概念的灵活应用中,培养学生的运用能力

数学教学的目的归根到底是培养学生的数学应用能力,概念教学也是如此. 通过对双曲线概念及方程的研究,我们不仅要求学生能够理解概念、应用概念,掌握双曲线标准方程的求法,更要让他们在理解双曲线概念的基础上提升分析问题和解决问题的能力. 教学中,教师可以通过求点的轨迹方程的练习,提升对双曲线概念的理解;通过题组训练,提高双曲线定义式的应用能力[3].

1. 求点的轨迹方程

求标准方程的方法有定义法和待定系数法. 定义法即根据双曲线的概念,确定轨迹,直接得到标准方程;待定系数法即设出标准方程,根据已知条件,求出a和b,然后得到标准方程.

例题:已知双曲线的焦点在y轴上,并且双曲线上两点P_1,P_2的坐标分别为$(3,-4\sqrt{2})$,$\left(\frac{9}{4},5\right)$,求该双曲线的标准方程.

分析:由题意知,双曲线的焦点在y轴上,可设标准方程为$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,又点$P_1(3,-4\sqrt{2})$,$P_2\left(\frac{9}{4},5\right)$是双曲线上的两点,则$\begin{cases}\frac{(-4\sqrt{2})^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1,\\ \frac{25}{a^2}-\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^2}{b^2}=1.\end{cases}$

设$m=\frac{1}{a^2}$,$n=\frac{1}{b^2}$,则$\begin{cases}32m-9n=1,\\ 25m-\frac{81}{16}n=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{16},\\ n=\frac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=16,\\ b^2=9.\end{cases}$所以双曲线的标准方程为$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

通过此例,让学生体会用待定系数法求曲线方程的过程. 利用待定系数法也可设所求的双曲线的标准方程为$Ay^2-Bx^2=1(A>0,B>0)$.

2. 通过题组训练,培养学生的应用能力

训练:(1)双曲线$4x^2-y^2-64=0$上一点P到它的一个焦点的距离等于1,求点P到另一个焦点的距离.

(2)化简方程:$\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=8$.

(3)点$B(0,-5)$,$C(0,5)$是$\triangle ABC$的两个顶点,且$|AB|-|AC|=6$,求点A的轨迹方程.

(4)下列说法中,正确的是(　　)

A. 平面内与两个定点F_1,F_2的距离之差等于常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹是双曲线

B. 平面内与两个定点F_1,F_2的距离之差的绝对值等于常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹是双曲线

C. 方程$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\pm\sqrt{3}$表示的曲线不是双曲线

D. 双曲线$\frac{x^2}{9-k}+\frac{y^2}{k-5}=1$的焦距等于4

学习数学概念,并非要求学生对概念死记硬背,而是要求学生在理解概念的基础上,能灵活应用概念解决问题,这才是教学的最终目的. 这一目的的实现,学生的运用能力提高了,数学素养自然也会提升.

概念教学,是数学教学的第一步. 如何让学生真正把握住数学概念,是一个值得探究的问题. 教学中,教师可通过类比进行概念教学,培养学生的学习能力;通过对概念教学的过程设计,培养学生的思维品质;通过对概念的灵活应用,培养学生的运用能力,进而实现学生核心素养的提升.

参考文献:

[1] 陈静安,方丽. 高中数学必修1中难点概念启发式教学策略[J]. 教学与管理,2014(31).

[2] 刘荣锋. “双曲线及其标准方程”的教学设计[J]. 中小学数学(高中版),2012(04).

[3] 王淼生,李为. 双曲线定义的精彩应用[J]. 数学通讯,2017(15).

万方数据