

江苏省仪征中学 2019 届高三（上）期中考试热身练习 4

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 评价_____

一、填空题：

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x = 0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.2. 复数 $z = (1 - 2i)^2 + i$ 的实部为_____.3. 函数 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 的图像中, 离坐标原点最近的一条对称轴的方程为_____.4. 在平面直角坐标系中, 直线 $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长为_____.5. 已知点 $P(1, m)$ 是函数 $y = ax + \frac{2}{x}$ 图像上的点, 直线 $x + y = b$ 是该函数图像在 P 点处的切线, 则 $a + b - m =$ _____.6. 设 P 为 $\triangle ABC$ 中线 AD 的中点, D 为边 BC 中点, 且 $AD = 2$, 若 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = -3$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____.7. 已知函数 $f(x) = x|x - 2|$, 则不等式 $f(\sqrt{2} - x) \leq f(1)$ 的解集为_____.8. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 的准线方与双曲线 $x^2 - y^2 = 2$ 的做准线重合, 则 $p =$ _____.9. 在平面直角坐标系中, O 为原点, $A(-1, 0), B(0, \sqrt{3}), C(3, 0)$, 动点 D 满足 $|\overrightarrow{CD}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}|$ 的最大值是_____.10. 设 $a > b > 0$, 则 $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{a - b}$ 的最小值为_____.11. 在平面直角坐标系中, A, B 分别是 x 轴和 y 轴上的动点, 若以 AB 为直径的圆 C 与直线 $2x + y - 4 = 0$ 相切, 则圆 C 面积的最小值为_____.12. 已知三次函数 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cd + d (a < b)$ 的导函数为 $f'(x)$, 导函数 $f'(x)$ 的导函数为 $f''(x)$, 如果对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f'(x) \geq f''(x)$ 恒成立, 则 $\frac{b^2}{a^2 + 2c^2}$ 的最大值为_____.

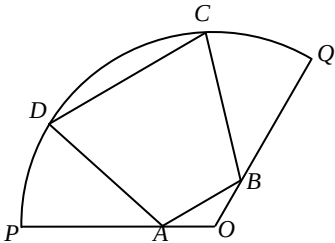
二、解答题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 a, b, c 成等比数列，且 $\cos B = \frac{3}{4}$

- (1) 若 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}$ ，求 $a+c$ 的值； (2) 求 $\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C}$ 的值。

2. 为丰富市民的文化生活，市政府计划在一块半径为 200 m，圆心角为 120° 的扇形地上建造市民广场．规划设计如图：内接梯形 $ABCD$ 区域为运动休闲区，其中 A, B 分别在半径 OP, OQ 上， C, D 在圆弧 PQ 上， $CD \parallel AB$ ； $\triangle OAB$ 区域为文化展示区， AB 长为 $50\sqrt{3}$ m；其余空地绿化区域，且 CD 长不得超过 200 m．

- (1) 试确定 A, B 的位置，使 $\triangle OAB$ 的周长最大？
(2) 当 $\triangle OAB$ 的周长最大时，设 $\angle DOC = 2\theta$ ，试将运动休闲区 $ABCD$ 的面积 S 表示为 θ 的函数，并求出 S 的最大值．



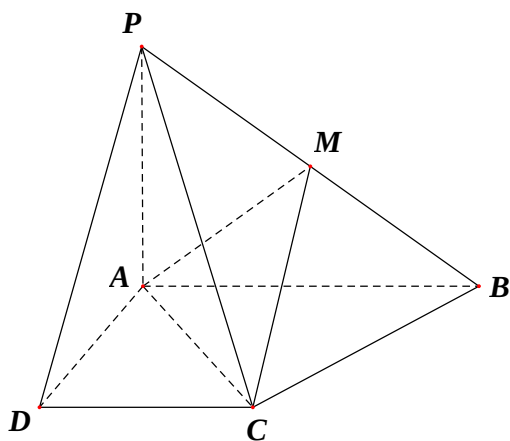
(第 2 题)

三、附加题：

1. 已知 A 为曲线 $C: 4x^2 - y + 1 = 0$ 上的动点，定点 $M(-2, 0)$ ，若 $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TM}$ ，求动点 T 的轨迹方程.

2. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形， $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = AD = DC = \frac{1}{2}AB = 1$, M 是 PB 的中点.

- (1) 证明：平面 $PAD \perp$ 平面 PCD ；
- (2) 求 AC 与 PB 所成角的余弦值；
- (3) 求平面 AMC 与平面 BMC 所成二面角（锐角）的余弦值.



答案：

一、填空题：

1. $\{0, 2\}$; 2. -3 ; 3. $-\frac{\pi}{6}$; 4. 2 ; 5. 2 ; 6. 0 ; 7. $[-1, +\infty)$; 8. 2 ; 9. $\sqrt{7}+1$; 10. 4 ;
11. $\frac{4}{5}\pi$; 12. $\sqrt{6}-2$.

二、解答题

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 a, b, c 成等比数列，且 $\cos B = \frac{3}{4}$

(1) 若 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}$ ，求 $a+c$ 的值； (2) 求 $\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C}$ 的值。

解：(1) 由 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}$ 可得 $ac \cdot \cos B = \frac{3}{2}$ ，因为

$$\cos B = \frac{3}{4}, \text{ 所以 } b^2 = ac = 2.$$

由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，得

$$a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \cos B = 5,$$

$$\text{则 } (a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 9, \text{ 故 } a+c = 3$$

$$(2) \text{ 由 } \cos B = \frac{3}{4} \text{ 可得 } \sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

由 $b^2 = ac$ 及正弦定理得 $\sin^2 B = \sin A \sin C$ ，

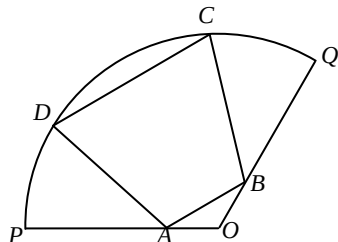
于是

$$\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\sin C \cos A + \cos C \sin A}{\sin A \sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin^2 B} = \frac{\sin B}{\sin^2 B} = \frac{1}{\sin B} = \frac{4\sqrt{7}}{7}.$$

2. 为丰富市民的文化生活，市政府计划在一块半径为 200 m，圆心角为 120° 的扇形地上建造市民广场。规划设计如图：内接梯形 $ABCD$ 区域为运动休闲区，其中 A, B 分别在半径 OP, OQ 上， C, D 在圆弧 PQ 上， $CD \parallel AB$ ； $\triangle OAB$ 区域为文化展示区， AB 长为 $50\sqrt{3}$ m；其余空地绿化区域，且 CD 长不得超过 200 m。

(1) 试确定 A, B 的位置，使 $\triangle OAB$ 的周长最大？

(2) 当 $\triangle OAB$ 的周长最大时，设 $\angle DOC = 2\theta$ ，试将运动休闲区 $ABCD$ 的面积 S 表示为 θ 的函数，并求出 S 的最大值。



(第2题)

解：（1）设 $OA=m$, $OB=n$, $m, n \in (0, 200]$,

在 $\triangle OAB$ 中, $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$,

即 $(50\sqrt{3})^2 = m^2 + n^2 + mn$,2 分

所以, $(50\sqrt{3})^2 = (m+n)^2 - mn \geq (m+n)^2 - \frac{(m+n)^2}{4} = \frac{3}{4}(m+n)^2$,

所以 $m+n \leq 100$, 当且仅当 $m=n=50$ 时, $m+n$ 取得最大值, 此时 $\triangle OAB$ 周长取得最大值.

答: 当 OA, OB 都为 50 m 时, $\triangle OAB$ 的周长最大.6 分

(2) 当 $\triangle AOB$ 的周长最大时, 梯形 $ACBD$ 为等腰梯形.

过 O 作 $OF \perp CD$ 交 CD 于 F , 交 AB 于 E ,

则 E, F 分别为 AB, CD 的中点,

所以 $\angle DOE = \theta$, 由 $CD \leq 200$, 得 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$8 分

在 $\triangle ODF$ 中, $DF = 200\sin \theta$, $OF = 200\cos \theta$.

又在 $\triangle AOE$ 中, $OE = OA\cos \frac{\pi}{3} = 25$, 故 $EF = 200\cos \theta - 25$10 分

所以, $S = \frac{1}{2}(50\sqrt{3} + 400\sin \theta)(200\cos \theta - 25)$
 $= 625(\sqrt{3} + 8\sin \theta)(8\cos \theta - 1)$
 $= 625(8\sqrt{3}\cos \theta - 8\sin \theta + 64\sin \theta \cos \theta - \sqrt{3}), \theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$. (不交代范围扣 2 分) 12 分

令 $f(\theta) = 8\sqrt{3}\cos \theta - 8\sin \theta + 64\sin \theta \cos \theta - \sqrt{3}, \theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$,

$f'(\theta) = -8\sqrt{3}\sin \theta - 8\cos \theta + 64\cos 2\theta = -16\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + 64\cos 2\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$,

又 $y = -16\sin(\theta + \frac{\pi}{6})$ 及 $y = \cos 2\theta$ 在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$ 上均为单调递减函数,

故 $f'(\theta)$ 在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$ 上为单调递减函数.

因 $f'(\frac{\pi}{6}) = -16(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \frac{1}{2}) > 0$, 故 $f'(\theta) > 0$ 在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$ 上恒成立,

于是, $f(\theta)$ 在 $\theta \in (0, \frac{\pi}{6}]$ 上为单调递增函数. 14 分

所以当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 有最大值, 此时 S 有最大值为 $625(8 + 15\sqrt{3})$.

答: 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 梯形 $ABCD$ 面积有最大值, 且最大值为 $625(8 + 15\sqrt{3}) \text{ m}^2$16 分

三、附加题：

1. 已知 A 为曲线 $C: 4x^2 - y + 1 = 0$ 上的动点, 定点 $M(-2, 0)$, 若 $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TM}$, 求动点 T 的轨迹方程.

解: 设 $T(x, y), A(x_0, y_0)$, 则 $4x_0^2 - y_0 + 1 = 0$, ①

又 $M(-2,0)$ ，由 $\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{TM}$ 得 $(x-x_0, y-y_0) = 2(-2-x, 0-y)$ ，

$$\therefore x_0 = 3x+4, y_0 = 3y,$$

代入①式得 $4(3x+4)^2 - 3y+1=0$ ，即为所求轨迹方程.

2. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形， $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA = AD = DC = \frac{1}{2}AB = 1$, M 是 PB 的中点.

(1) 证明：平面 $PAD \perp$ 平面 PCD ;

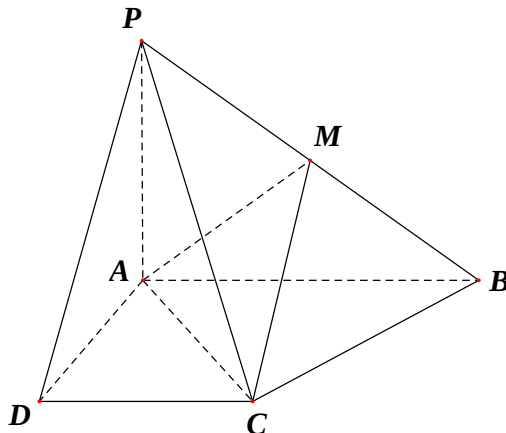
(2) 求 AC 与 PB 所成角的余弦值;

(3) 求平面 AMC 与平面 BMC 所成二面角（锐角）的余弦值.

解：建立如图所示的空间直角坐标系，

则

$$A(0,0,0), D(1,0,0), P(0,0,1), B(0,2,0), C(1,1,0), M(0,1,\frac{1}{2})$$



(1) 证明：因为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1) \in$ (,

故 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, 所以 $AP \perp DC$,

由题设知 $AD \perp DC$ ，且 AP 与 AD 是平面 PAD 内的两条相交直线，

由此得 $DC \perp$ 面 PAD ，又 $DC \subset$ 面 PCD ，故平面 $PAD \perp$ 面 PCD 。

(2) 因 $\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{PB} = (0,2,-1)$, $\therefore |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{5}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB} = 2$,

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

(3) 设平面 AMC 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{AM}, \therefore \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AM} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (0, 1, \frac{1}{2}) = y_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0,$$

$$\text{又 } \vec{n}_1 \perp \overrightarrow{AC}, \therefore \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (1, 1, 0) = x_1 + y_1 = 0,$$

$$\text{取 } x_1 = 1, \text{ 得 } y_1 = -1, z_1 = 2, \text{ 故 } \vec{n}_1 = (1, -1, 2),$$

$$\text{同理可得面 } BMC \text{ 的一个法向量为 } \vec{n}_2 = (1, 1, 2),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1-1+4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{3},$$

$\therefore$ 平面 AMC 与平面 BMC 所成二面角（锐角）的余弦值为 $\frac{2}{3}$.