



例 7 若 $x > 0$, 关于 x 的不等式 $a(e^{ax} + 1) \geq 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x$ 恒成立, 求 a 的最小值.

解析 由题可知 $ax(e^{ax} + 1) \geq 2(x^2 + 1) \ln x$, 则 $axe^{ax} + ax \geq x^2 \ln x^2 + \ln x^2$.

令 $f(x) = xe^x + x$, 则 $f(ax) \geq f(\ln x^2)$.

由求导分析可知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则

$$ax \geq \ln x^2, \text{ 即 } a \geq \frac{2 \ln x}{x}.$$

令 $y = \frac{2 \ln x}{x}$, 求导可知当 $x = e$ 时取得最大值, 则

$$a \geq \frac{2}{e}.$$

6 利用 $x = a^{\log_a x} = \log_a a^x$ 变形构造函数

例 8 已知函数 $f(x) = xe^x - a(\ln x + x)$, 若函数

有两个零点, 求 a 的取值范围.

解析 由题可知 $f(x) = e^{\ln x} e^x - a(\ln x + x) = e^{\ln x + x} - a(\ln x + x)$.

令 $t = \ln x + x$, 则 $g(t) = e^t - at$.

又函数 $t = \ln x + x$ 单调递增, 即 $g(t)$ 在实数范围内零点个数与 $f(x)$ 零点个数相同.

当 $a = 0$ 时, $g(t) = e^t$ 没有零点, 当 $a < 0$ 时, $g'(t) = e^t - a > 0$, 则函数 $g(t)$ 单调递增, 则不合题意, 当 $a > 0$ 时, 令 $g'(t) = e^t - a > 0$, 则函数 $g(t)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g_{\min}(t) = g(\ln a) = a(1 - \ln a)$.

当 $0 < a < e$ 时, $g(\ln a) > 0$, 则函数无零点, 当 $a = e$ 时, $g(\ln a) = 0$, 则函数只有一个零点, 当 $a > e$ 时, $g(\ln a) < 0$, 则函数有两个零点. 综上: $a > e$.

把控三角函数与导数结合的六大命题点

清华大学附属中学永丰学校 100094 吴永芳

【摘要】 导数是研究函数问题的有力工具, 由于三角函数属于函数系统, 利用导数研究三角函数的单调性、奇偶性、对称性等性质及最值问题、含参问题等, 具有得天独厚的优势, 能很好地彰显解题方法的灵活性、多样性与独创性, 也更充分地考查数学核心素养, 综合应变与解题调控能力.

【关键词】 把控; 三角函数; 导数; 结合; 命题

随着高考命题改革的深化, 高考数学命题往往不囿于某一个知识点, 而是强调知识间的整合, 在知识点的交会、结合处设计试题. 在历年高考中, 三角函数与导数的结合问题备受高考命题者青睐, 而且常处于压轴题的位置. 下面以近两年高考题和各地模拟题为例来说明三角函数与导数结合的 6 大命题点.

命题点 1 利用导数研究三角函数的性质

三角函数的性质主要是指单调性、奇偶性、对称性等, 利用导数研究这些性质的途径有:

1) 若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调递增(减), 则 $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

2) 可导奇函数的导函数为偶函数, 可导偶函数的导函数为奇函数.

3) 当 $x = x_0$ 为对称轴时, 函数取得最大或最小值, 此时函数在最高点或最低点处的切线斜率为 0, 即 $f'(x_0) = 0$.

例 1 (2021 年八省联考 12 题) 设函数 $f(x) =$

$$\frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x}, \text{ 则 } ().$$

$$\text{A. } f(x) = f(x + \pi)$$

$$\text{B. } f(x) \text{ 的最大值为 } \frac{1}{2}$$

$$\text{C. } f(x) \text{ 在 } \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ 上单调递增}$$

$$\text{D. } f(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 上单调递减}$$

解析 因为 $f(x) = \frac{\cos 2x}{2 + \sin x \cos x} = \frac{2 \cos 2x}{4 + \sin 2x}$, 所

以 $f(x + \pi) = \frac{2 \cos 2(x + \pi)}{4 + \sin 2(x + \pi)} = \frac{2 \cos 2x}{4 + \sin 2x} = f(x)$, A 正确.

令 $\frac{2 \cos 2x}{4 + \sin 2x} = m$, 则 $m \sin 2x - 2 \cos 2x = -4m$, 所

以 $\sqrt{m^2 + 4} \sin(2x + \varphi) = -4m$, 所以 $\left| \frac{-4m}{\sqrt{m^2 + 4}} \right| \leq 1$,



整理得 $m^2 \leq \frac{4}{15}$, 解得 $m \leq \frac{2\sqrt{15}}{15}$, 所以 $f(x)_{\max} = \frac{2\sqrt{15}}{15}$, B 错误.

$$f'(x) = \frac{-4\sin 2x(4 + \sin 2x) - 2\cos 2x \cdot 2\cos 2x}{(4 + \sin 2x)^2} = \frac{-16\sin 2x - 4}{(4 + \sin 2x)^2}, \text{令 } \varphi(x) = -16\sin 2x - 4, \text{则 } \varphi(x) \text{ 在}$$

在 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递减, 且 $\varphi(-\frac{\pi}{4}) = 12 > 0$,

$\varphi(0) = -4 < 0$, 所以存在唯一的 $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, 0)$, 使

$\varphi(x_0) = 0$, 且当 $-\frac{\pi}{4} < x < x_0$ 时, $\varphi(x) > 0$, $f'(x)$

> 0 , 所以 $f(x)$ 单调递增, 当 $x_0 < x < 0$ 时, $\varphi(x) < 0$, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减, C 错误.

$$f'(x) = \frac{-16\sin 2x - 4}{(4 + \sin 2x)^2} < 0 \text{ 在 } (0, \frac{\pi}{4}) \text{ 上恒成立,}$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减, 所以 D 正确.

故选 AD.

点评 本题将三角函数的恒等变换、周期、最值、单调性等重要性质及函数零点、导数应用等悉数涉及, 需要考生掌握三角函数的恒等变换, 熟练运用设参、三角函数的有界性、求导、函数零点判断等知识与方法技巧, 考查的容量大. 对于选项 C、D, 充分利用导数知识作出判断.

命题点 2 利用导数求三角函数的最值

利用导数先研究函数的单调性, 进而求出最值.

例 2 (2020 届广东省广州市一模理 16) 已知 $\triangle ABC$ 三个内角为 A, B, C , 且 $\sin A, \sin B, \sin C$ 成等差数列, 则 $\sin 2B + 2\cos B$ 的最小值为_____, 最大值为_____.

解析 因为 $\sin A, \sin B, \sin C$ 成等差数列, 所以 $\sin A + \sin C = 2\sin B$.

所以由正弦定理, 得 $a + c = 2b$.

$$\text{由余弦定理, 得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(a+c)^2 - 2ac - b^2}{2ac} = \frac{4b^2 - b^2}{2ac} - 1 = \frac{3b^2}{2ac} - 1.$$

由基本不等式, 得 $2ac \leq \frac{(a+c)^2}{2}$, 所以 $\cos B \geq$

$$\frac{3b^2}{\frac{(a+c)^2}{2}} = \frac{6b^2}{(a+c)^2} = \frac{6b^2}{(2b)^2} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

由 B 是 $\triangle ABC$ 的内角, 知 $0 < B < \pi$, 所以

$$0 < B \leq \frac{\pi}{3}.$$

记 $f(B) = \sin 2B + 2\cos B, B \in (0, \frac{\pi}{3}]$, 则 $f'(B)$

$$= \cos 2B \times 2 - 2\sin B = 2(1 - 2\sin^2 B) - 2\sin B = -2(2\sin^2 B + \sin B - 1) = -2(2\sin B - 1)(\sin B + 1).$$

令 $f'(B) = 0$, 得 $\sin B = \frac{1}{2}$. 由 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$, 得

$$B = \frac{\pi}{6}.$$

当 $0 < B < \frac{\pi}{6}$ 时, $f'(B) > 0$, 所以 $f(B)$ 单调递

增, 所以 $f(0) < f(B) < f(\frac{\pi}{6})$, 即 $2 < f(B) < \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

当 $\frac{\pi}{6} < B \leq \frac{\pi}{3}$ 时, $f'(B) < 0$, 所以 $f(B)$ 单调

递减, 所以 $f(\frac{\pi}{3}) \leq f(B) < f(\frac{\pi}{6})$, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \leq f(B) < \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以当 $B = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(B)$ 取得最大值, 且 $f(B)_{\max} =$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}; \text{当 } B = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } f(B) \text{ 取得最小值, 且 } f(B)_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

故 $\sin 2B + 2\cos B$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, 最大值

$$\text{为 } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

点评 该解法首先利用正、余弦定理并结合基本不等式求得角 B 的范围, 进而构造函数 $f(B)$, 并利用导数研究函数 $f(B)$ 的单调性, 从而求得最值, 体现了逻辑推理、数学建模及数学运算等核心素养的渗透与应用.

命题点 3 利用导数求三角函数的极值点

利用导数求三角函数的极值点问题, 常结合函数零点存在定理和三角函数的图象与性质进行, 要紧扣极值点的概念求解: 函数在 $x = x_0$ 处满足 $f'(x_0) = 0$, 若导函数的值在该点附近符合“左正右负”, 则 x_0 是极大值点; 若符合“左负右正”, 则 x_0 是极小值点.

例 3 (2019 年高考全国卷 I 理 20) 已知函数

$f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数. 证明:

(1) $f'(x)$ 在区间 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 内存在唯一极大



值点;

(2) $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

解析 (1) 因为 $f(x) = \sin x - \ln(1+x)$, 所以

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{令 } g(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}, x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}, x \in \left(-1, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$g'(x) \text{ 在 } \left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递减, 且 } g'(0) =$$

$$-\sin 0 + 1 = 1 > 0, g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} + \frac{4}{(\pi+2)^2} =$$

$$\frac{4}{(\pi+2)^2} - 1 < 0, \text{ 所以 } \exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } g'(x_0)$$

$$= 0, \text{ 所以 } g''(x) = -\cos x - \frac{2}{(x+1)^2} < 0 \text{ 在}$$

$$\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 恒成立, 所以当 } x \in (-1, x_0) \text{ 时, } g'(x) > 0;$$

$$x \in (x_0, \frac{\pi}{2}) \text{ 时, } g'(x) < 0, \text{ 即 } g(x) \text{ 在 } (-1, x_0) \text{ 上单}$$

调递增; 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 则 $x = x_0$ 为 $g(x)$ 唯一的极大值点.

故 $f'(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 存在唯一极大值点.

(2) 解析见例 4.

点评 求得导函数后, 可判断出导函数在

$\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 根据零点存在定理可判断出

$\exists x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 进而得到导函数在

$\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性, 从而证得结论.

命题点 4 借助导数讨论三角函数的零点个数

利用导数考查函数零点问题, 经常与零点存在定理一起使用, 证明在某个区间内存在零点.

例 4 见例 3(2).

解析 由题意知: $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$.

① 当 $x \in (-1, 0]$ 时, 由例 3 解析可知 $f'(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递增, 所以 $f'(x) \leq f'(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递减.

又 $f(0) = 0$, 所以 $x = 0$ 为 $f(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上的唯一零点.

② 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递

增, 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, 又 $f'(0) = 0$, 所以 $f'(x_0) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 此时 $f(x) > f(0) = 0$, 不存在零点.

$$\text{又 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi+2} = -\frac{2}{\pi+2} < 0, \text{ 所以}$$

$\exists x_1 \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(x_1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 (x_0, x_1) 上单调递增, 在 $\left(x_1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

又 $f(x_0) > f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{2e}{\pi+2} > \ln 1 = 0$, 所以 $f(x) > 0$ 在 $\left(x_0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立, 此时不存在零点.

③ 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时, $\sin x$ 单调递减, $-\ln(x+1)$

单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减.

$$\text{又 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, f(\pi) = \sin \pi - \ln(\pi+1) =$$

$$-\ln(\pi+1) < 0, \text{ 所以 } f(\pi) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上存在唯一零点.

④ 当 $x \in (\pi, +\infty)$ 时, $\sin x \in [-1, 1]$,

$$\ln(x+1) > \ln(\pi+1) > \ln e = 1,$$

所以 $\sin x - \ln(x+1) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(\pi, +\infty)$ 上不存在零点.

综上所述, $f(x)$ 有且仅有 2 个零点.

点评 本题考查了利用导数解决函数零点个数的问题. 解决零点问题的关键一方面是利用零点存在定理或最值点来说明存在零点, 另一方面是利用函数的单调性说明在区间内零点的唯一性, 二者缺一不可.

例 5 (2020 届安徽省合肥市二模理 21) 已知函数 $f(x) = e^x \sin x$ (e 是自然对数的底数).

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 记 $g(x) = f(x) - ax$, 若 $0 < a < 3$, 试讨论 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的零点个数.

(参考数据: $e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.8$).

解析 (1) 函数 $f(x) = e^x \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.



由 $f(x) = e^x \sin x$, 得 $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

由 $f'(x) < 0$, 得 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) < 0$, 解得 $2k\pi + \frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi) (k \in \mathbb{Z})$.

(2) 由已知 $g(x) = e^x \sin x - ax$, 所以 $g'(x) = e^x(\sin x + \cos x) - a$.

令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = 2e^x \cos x$.

因为 $x \in (0, \pi)$, 所以当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 即 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减.

因为 $g'(0) = 1 - a, g'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a > 0, g'(\pi) = -e^\pi - a < 0$.

① 当 $1 - a \geq 0$, 即 $0 < a \leq 1$ 时, $g'(0) \geq 0$, 所以 $g'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的图象大致如图 1, 所以 $\exists x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 (x_0, π) 上单调递减.

因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x_0) > 0$.

又因为 $g(\pi) = -a\pi < 0$, 所以由零点存在性定理可得, 此时 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上仅有一个零点.

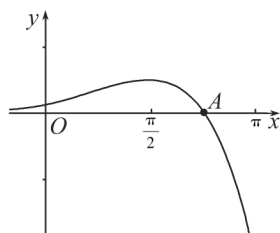


图 1

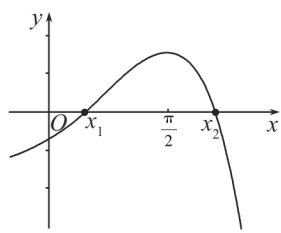


图 2

② 当 $1 < a < 3$ 时, $g'(0) = 1 - a < 0$, 又因为 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减, 而 $g'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - a > 0$, 从而 $g'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上

的图象大致如图 2.

所以 $\exists x_1 \in (0, \frac{\pi}{2}), x_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 使得 $g'(x_1) = 0, g'(x_2) = 0$, 且当 $x \in (0, x_1) \cup x \in (x_2, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 和 (x_2, π) 上单调递减, 在 (x_1, x_2) 上单调递增.

因为 $g(0) = 0$, 所以 $g(x_1) < 0$.

因为 $g(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}a > e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3\pi}{2} > 0$, 所以 $g(x_2) > 0$.

又因为 $g(\pi) = -a\pi < 0$, 由零点存在性定理可得, $g(x)$ 在 (x_1, x_2) 和 (x_2, π) 内各有一个零点, 即此时 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个零点.

综上所述, 当 $0 < a \leq 1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上仅有一个零点, 当 $1 < a < 3$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有两个零点.

点评 本题(2)通过构造函数求导, 在分类讨论的基础上, 作出函数图象, 通过观察分析图象, 利用零点存在定理确定出函数零点个数, 考查了数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象和数学运算等数学核心素养.

命题点 5 利用导数研究三角不等式问题

例 6 (2021 年八省联考 22(压轴题)) 已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - \cos x, g(x) = e^x + \sin x + \cos x$.

(1) 证明: 当 $x > -\frac{5\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq 0$;

(2) 若 $g(x) \geq 2 + ax$, 求 a .

解析 (1) $f'(x) = e^x - \cos x + \sin x$.

① 当 $x \in (-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$ 时, $-\sin x - \cos x \geq 0$, 所以 $f(x) \geq 0$.

② 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $-\cos x + \sin x < -1$, 所以 $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 而 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$.

③ 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$.

④ 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $1 + x > \cos x + \sin x$.

设 $h(x) = e^x - x - 1$, 则当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) = e^x - 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 单调递增, $h(0) = 0$, 所以 $f(x) > h(x) > 0$.

(2) 由 $g(x) = e^x + \sin x + \cos x$, 得 $g'(x) = e^x + \cos x - \sin x$.

设 $k(x) = (g(x) - 2 - ax)' = g'(x) - a = e^x + \cos x - \sin x - a$, 所以 $k'(x) = e^x - \sin x - \cos x = f(x)$.



由 (1) 知, 当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, +\infty\right)$ 时, $k'(x) \geq 0$, 所

以 $k(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{4}, +\infty\right)$ 上单调递增, $k(0) = 2 - a$.

① 若 $a > 2$, $k(0) < 0$, $k(\ln a + 1) > 0$, 故存在唯一 $x_0 \in (0, \ln a + 1)$, 使得 $k(x_0) = 0$.

$x \in (0, x_0)$ 时, $k(x) < 0$, $g(x) - 2 - ax$ 单调递减, 而 $g(0) - 2 - a \times 0 = 0$, 所以 $g(x_0) - 2 - ax_0 < 0$.

② 若 $0 < a < 2$, $k(0) > 0$, $k(-\pi) < 0$, 故存在唯一 $x_1 \in (-\pi, 0)$, 使得 $k(x_1) = 0$.

当 $x \in (x_1, 0)$ 时, $k(x) > 0$, $g(x) - 2 - ax$ 单调递增, 而 $g(0) - 2 - a \times 0 = 0$, 所以 $g(x_1) - 2 - ax_1 < 0$.

③ 若 $a \leq 0$, $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2 - a\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

④ 若 $a = 2$, 当 $x \in \left(-\infty, -\frac{5\pi}{4}\right]$ 时, $g(x) - 2 - 2x > 0$.

当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, +\infty\right)$ 时, $k(x)$ 单调递增, $k(0) = 0$.

当 $x \in \left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$ 时, $k(x) < 0$, $g(x) - 2 - 2x$ 单调递减, 又 $g(0) - 2 - 2x = 0$, 所以 $g(x) - 2 - 2x > 0$;

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $k(x) > 0$, $g(x) - 2 - 2x$ 单调递增, $g(0) - 2 - 2x = 0$, 所以 $g(x) - 2 - 2x \geq 0$.

综上, $a = 2$.

点评 本题是三角不等式问题与导数应用的交汇问题, 在分类讨论的基础上, 通过构造函数, 利用导数研究函数的单调性, 从而证明三角不等式或由不等式求参数的值, 充分考查了数学抽象、数学运算、逻辑推理及数学建模等数学核心素养.

命题点 6 导数与三角函数的综合应用问题

例 7 (2020 年全国 II 卷理 21(压轴题)) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 的单调性;

(2) 证明: $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$;

(3) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \leq \frac{3^n}{4^n}$.

解析 (1) 由函数的解析式可得:

$f(x) = 2\sin^3 x \cos x$, 则 $f'(x) = 2(3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x) = 2\sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\sin^2 x(4\cos^2 x - 1) = 2\sin^2 x(2\cos x + 1)(2\cos x - 1)$, $f'(x) = 0$ 在 $x \in (0, \pi)$

上的根为 $x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = \frac{2\pi}{3}$.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

(2) 注意到 $f(x + \pi) = \sin^2(x + \pi) \sin 2(x + \pi) = \sin^2 x \sin 2x = f(x)$, 故函数 $f(x)$ 是周期为 π 的函数.

结合 (1) 的结论, 计算可得 $f(0) = f(\pi) = 0$,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 从而可得 $[f(x)]_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$,

$[f(x)]_{\min} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$, 即 $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

(3) 结合 (2) 的结论有:

$$\begin{aligned} & \sin^2 x \sin^2 2x \sin^2 4x \cdots \sin^2 2^n x \\ &= [\sin^3 x \sin^3 2x \sin^3 4x \cdots \sin^3 2^n x]^{\frac{2}{3}} \\ &= [\sin x (\sin^2 x \sin 2x) (\sin^2 2x \sin 4x) \cdots (\sin^2 2^{n-1} x \sin 2^n x) \sin^2 2^n x]^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \left[\sin x \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \cdots \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times \sin^2 2^n x \right]^{\frac{2}{3}} \\ &\leq \left[\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^n \right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{4} \right)^n. \end{aligned}$$

点评 本题是三角函数与导数结合的综合问题, 很好地考查了变换、放缩等解题技巧及数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

三角函数与导数作为中学数学的两个核心知识, 二者的结合是高考命题的必然趋势. 因此, 在复习备考尤其是临考复习阶段, 要重视研究三角函数与导数结合问题的题型特点, 有意识强化针对性训练, 从而顺应高考命题的变化.

作者简介 吴永芳(1964—), 男, 中学数学高级教师, 主要研究中学数学教育教学. 2007 年被国家人事部教育部授予模范全国教师称号, 2011 年评为江西省特级教师, 省骨干教师, 市名师, 市学科带头人. 所带学生在高考及学科竞赛中, 屡创佳绩.