期中综合小练 (4)

一、选择题

1. 1. 实数 $a=0.2^{\sqrt{2}}$，$b=log_{\sqrt{2}}0.2$，$c=\sqrt{2}^{0.2}$的大小关系正确的是（　　）

A. $a<c<b$　　B. $a<b<c$　　C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

2. 若 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x\in[0，+\infty)$ 时，$f(x)=x-1$，则 $f(x-1)<0$ 的解集是（　　）

A. $(-1,0)$　　B. $(-\infty,0)\cup(1,2)$　C. $(1,2)$　　D. $(0,2)$

3. 已知$f(x-1)=x^2+4x-5$,则$f(x)$的表达式是(　)

A. x^2+6x　　B. x^2+8x+7　　C. x^2+2x-3　　D. $x^2+6x-10$

4. 若 x，$y\in R$，且 $2^x=18^y=6^{xy}$，则 $x+y$ 为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 1 或 2　　D. 0 或 2

二、填空题

5. 若集合$M=\left\{x|y=\frac{1}{2^x-4},x\in R\right\}$,$N=\{x|y=\sqrt{x-1},x\in R\}$,则$M\cup N=$______________-.

6. 已知函数 $f(x)=ax^3-bx+\frac{c}{x}+2$，且 $f(-5)=17$，则 $f(5)=$______.

7. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象过点（3，$\frac{1}{3}$），则函数 $g(x)=(2x-1)f(x)$ 在区间$[\frac{1}{2}$，2]上的最大值是______.

8. 函数 $f(x)=a|\log_2x|+1$（$a\neq0$），定义函数 $F(x)=\begin{cases}f(x),x>0\\f(-x),x<0\end{cases}$，给出下列命题：

①$F(x)=|f(x)|$；
②函数 $F(x)$ 是偶函数；
③当 $a<0$ 时，若 $0<m<n<1$，则有 $F(m)-F(n)<0$ 成立；
④当 $a>0$ 时，函数 $y=F(x)-2$ 有 4 个零点.
其中正确命题的序号为______.

三、解答题

9. 已知集合 $A=\{x|m-2<x<m+1\}$，$B=\{x|1<x<5\}$．

（Ⅰ）若 $m=1$，求 $A\cup B$；

（Ⅱ）若 $A\cap B=A$，求实数 m 的取值范围．

10. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$（$a\neq0$），满足条件 $f(x+1)-f(x)=2x$（$x\in R$），且 $f(0)=1$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）当 $x\geq0$ 时，$f(x)\geq mx-3$ 恒成立，求实数 m 的取值范围．

11. 已知函数 $f(x)=a^x+b^x$（其中 a，b 为常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$，$b>0$ 且 $b\neq 1$）的图象经过点 $A(1,6)$，$B(-1,\frac{3}{4})$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若 $a>b$，函数 $g(x)=(\frac{1}{a})^x-(\frac{1}{b})^x+2$，求函数 $g(x)$ 在 $[-1，2]$ 上的值域.

12. 已知函数$f(x)=\frac{3^x-2^{-x}}{3^x+2^{-x}}$.

（1）判断$f(x)$的奇偶性；

（2）判断并证明$f(x)$的单调性，写出$f(x)$的值域.

综合小练 (4) 答案解析

备用：已知 $f(x)=|x^2-1|+x^2+kx$．

（Ⅰ）若 $k=2$，求方程 $f(x)=0$ 的解；

（Ⅱ）若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 在（0，2）上有两个解 x_1，x_2，求 k 的取值范围，并证明 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<4$．

【答案】解：（Ⅰ）解：（1）当 $k=2$ 时，$f(x)=|x^2-1|+x^2+kx$

①当 $x^2-1\geq0$ 时，即 $x\geq1$ 或 $x\leq-1$ 时，方程化为 $2x^2+2x-1=0$ 解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，因为 $0<\frac{-1+\sqrt{3}}{2}<1$，故舍去，所以 $x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$．②当 $x^2-1<0$ 时，$-1<x<1$ 时，方程化为 $2x+1=0$ 解得 $x=-\frac{1}{2}$ 由①②得当 $k=2$ 时，方程 $f(x)=0$ 的解所以 $x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$．

（*II*）解：不妨设 $0<x_1<x_2<2$，因为 $f(x)=\begin{cases}2x^2+kx-1,|x|>1\\kx+1,|x|\leq1\end{cases}$ 所以 $f(x)$ 在（0，1]是单调函数，故 $f(x)=0$ 在（0，1]上至多一个解，若 $1<x_1<x_2<2$，则 $x_1x_2=-\frac{1}{2}<0$，故不符题意，因此 $0<x_1\leq1<x_2<2$．

由 $f(x_1)=0$ 得 $k=-\frac{1}{x_1}$，所以 $k\leq-1$；由 $f(x_2)=0$ 得 $k=\frac{1}{x_2}-2x_2$，所以 $-\frac{7}{2}<k<-1$；

故当 $-\frac{7}{2}<k<-1$ 时，方程 $f(x)=0$ 在（0，2）上有两个解．当 $0<x_1\leq1<x_2<2$ 时，$k=-\frac{1}{x_1}$，$2x_2^2+kx_2-1=0$ 消去 k 得 $2x_1x_2^2-x_1-x_2=0$ 即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2x_2$，因为 $x_2<2$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}<4$．

综合小练（4）答案解析

1.【答案】C2.【答案】D3.【答案】A4.【答案】D5.【答案】R6.【答案】-137.【答案】$\frac{3}{2}$

8.【答案】②③④9.【答案】解：（Ⅰ）由 $m=1$ 得，$A=\{x|-1<x<2\}$；

∴$A\cup B=\{x|-1<x<5\}$；（Ⅱ）∵$A\cap B=A$；∴$A\subseteq B$；∴$\begin{cases} m-2\ge 1 \\ m+1\le 5 \end{cases}$；

解得 $3\le m\le 4$；∴实数 m 的取值范围为$[3，4]$.

10.【答案】解：（Ⅰ）由 $f(0)=1$ 得，$c=1$，由 $f(x+1)-f(x)=2x$，得 $a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+c)=2x$ 化简得，$2ax+a+b=2x$，所以：$2a=2$，$a+b=1$，可得：$a=1$，$b=-1$，$c=1$，所以 $f(x)=x^2-x+1$；

（Ⅱ）由题意得，$x^2-x+1\ge mx-3$，$x\in[0，+\infty)$ 恒成立．即：$g(x)=x^2-(m+1)x+4\ge 0$，$x\in[0，+\infty)$ 恒成立．

其对称轴 $x=\frac{m+1}{2}$，当$\frac{m+1}{2}\le 0$，即 $m\le -1$ 时，$g(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，$g(0)=4>0$∴$m\le -1$ 成立②当$\frac{m+1}{2}>0$ 时，

满足$\begin{cases} \frac{m+1}{2}>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$计算得：$-1<m\le 3$ 综上所述，实数 m 的取值范围是 $(-\infty，3]$.

11.【答案】解：（Ⅰ）∵函数 $f(x)=a^x+b^x$（其中 a，b 为常数，$a>0$ 且 $a\ne 1$，$b>0$ 且 $b\ne 1$）

的图象经过点 $A(1，6)$，$B(-1，\frac{3}{4})$．∴$f(1)=a+b=6$，且 $f(-1)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{4}$，∴$a=2$，$b=4$；或 $a=4$，$b=2$．

故有 $f(x)=2^x+4^x$．（Ⅱ）若 $a>b$，则 $a=4$，$b=2$，函数$g(x)=(\frac{1}{a})^x-(\frac{1}{b})^x+2=(\frac{1}{4})^x-(\frac{1}{2})^x+2$，

令 $t=(\frac{1}{2})^x$，在$[-1，2]$上，$t\in[\frac{1}{4}，2]$，$g(x)=h(t)=t^2-t+2=(t-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}\in[\frac{7}{4}，4]$，

故函数 $g(x)$ 在$[-1，2]$上的值域为$[\frac{7}{4}，4]$.

12.【答案】解：（1）∵$f(x)=\frac{3^x-2^{-x}}{3^x+2^{-x}}=\frac{2^x\cdot 3^x-1}{2^x\cdot 3^x+1}=\frac{6^x-1}{6^x+1}$

∴$f(-x)=\frac{6^{-x}-1}{6^{-x}+1}=\frac{1-6^x}{1+6^x}=-f(x)$，$x\in R$，则 $f(x)$ 是奇函数．

（2）$f(x)=\frac{6^x-1}{6^x+1}=\frac{(6^x+1)-2}{6^x+1}=1-\frac{2}{6^x+1}$在 R 上是增函数，

证明如下：任意取 x_1，x_2，使得：$x_1>x_2$ ∴ $6^{x_1}>6^{x_2}>0$

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{6^{x_2}+1}-\frac{2}{6^{x_1}+1}=\frac{2(6^{x_1}-6^{x_2})}{(6^{x_1}+1)(6^{x_2}+1)}>0$∴$f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在 R 上是增函数．

∵$0<\frac{2}{6^x+1}<2$，∴$f(x)=1-\frac{2}{6^x+1}\in(-1，1)$，

则 $f(x)$ 的值域为$(-1，1)$．