

圆锥曲线中的一类对称问题

大庆实验中学 郝明泉

圆锥曲线上存在两点关于直线对称问题是高考中的一类热点问题,该问题集直线与圆锥曲线位置关系,点与圆锥曲线的位置关系,中点弦,方程与不等式等数学知识于一体,经常在知识网络交汇处、思想方法的交汇线和能力层次的交叉区设置问题,一般问题的综合性较强,但难度不是很大,具有很好的选拔功能,对学生的知识和能力的考察情况也较好。下面本文就这一类问题的解决方法,结合下面的例题,谈一下自己的看法。

例:已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 试确定 m 的取值范围,使得对于直线 $l: y = 4x + m$, 椭圆 C 上有不同的两点关于这条直线对称。

法一: 利用判别式及韦达定理来求解

两点 A, B 关于直线 l 对称, 对称中体现的两要点: 垂直和两点连线中点在对称直线 l 上, 因此使用这种方法求解时, 必须同时确保: (1) 垂直; (2) 平分; (3) 存在, 下面就说明三个确保的实施。

解: 椭圆上存在两点 A, B 关于直线 $l: y = 4x + m$ 对称

设直线 AB 为: $y = -\frac{1}{4}x + n$ (确保垂直)。

则直线 AB 与椭圆有两个不同的交点

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + n \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow 13x^2 - 8nx + 16n^2 - 48 = 0$$

$$\Delta = -192(4n^2 - 13) > 0 \quad (\text{确保存在})$$

$$\text{即: } -\frac{\sqrt{13}}{2} < n < \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{①}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-8n}{13} = \frac{8n}{13}$$

$$A, B \text{ 两点的中点的横坐标为 } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4n}{13}, \text{ 纵坐标为 } -\frac{1}{4} \times \frac{4n}{13} + n = \frac{12}{13}n$$

$$\text{则点 } \left(\frac{4n}{13}, \frac{12}{13}n \right) \text{ 在直线 } l: y = 4x + m \text{ 上, } \frac{12}{13}n = 4 \times \frac{4n}{13} + m. \quad (\text{确保平分})$$

$$\Rightarrow m = -\frac{4}{13}n$$

把上式代入①中,得: $-\frac{2\sqrt{13}}{13} < m < \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

法二: 点差法

点差法是解决中点弦问题的一种常见方法, 对称问题符合点差法的应用条件, 过程如下

解: 设椭圆上关于 l 对称的两点分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 弦 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$, 代

入椭圆方程后作差, 得

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3x_0}{4y_0} = -\frac{1}{4} \quad ①$$

$$\text{由点 } M(x_0, y_0) \text{ 在直线 } l: y = 4x + m \text{ 上, 得 } y_0 = 4x_0 + m \quad ②$$

$$\text{由①②解得 } x_0 = -m, y_0 = -3m$$

因为点 $M(x_0, y_0)$ 在椭圆的内部

$$\text{所以 } \frac{(-m)^2}{4} + \frac{(-3m)^2}{3} < 1$$

$$\text{解得 } -\frac{2\sqrt{13}}{13} < m < \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

法三: 利用根的分布求解

C 上存在不同的两点关于直线 l 对称, 等价于 C 上存在被 l 垂直平分的弦, 即等价于 C 的符合条件的弦所在的直线方程, 与曲线 C 的方程组成的方程组在某确定的区间上有两不同的解, 因此可利用一元二次方程根的分布来求解, 过程如下。

解: 由解法二, 知中点 $M(x_0, y_0)$ 的坐标为 $(-m, -3m)$,

$$\text{所以直线 } AB \text{ 的方程为 } y = -\frac{1}{4}x - \frac{13m}{4}$$

$$\text{代入椭圆方程整理得 } 13x^2 + 26mx + 169m^2 - 48 = 0$$

此方程在 $[-2, 2]$ 上有两个不等实根

$$\text{令 } f(x) = 13x^2 + 26mx + 169m^2 - 48, \text{ 则}$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(2) \geq 0 \\ f(-2) \geq 0 \\ -2 < -m < 2 \end{cases} \quad \text{解得} \quad -\frac{2\sqrt{13}}{13} < m < \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

法四：平行弦中点轨迹法

寻求有关弦中点轨迹，通过轨迹曲线与圆锥曲线的位置关系，利用数形结合寻求参量范围。

解：设椭圆上关于 l 对称的两点分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，弦 AB 的中点为 $M(x_0, y_0)$ ，将

A, B 坐标代入椭圆方程后作差，得

$$k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3x_0}{4y_0} = -\frac{1}{4}$$

$$y_0 = 3x_0$$

所以以 $-\frac{1}{4}$ 为斜率的平行弦的中点轨迹是直线 $y = 3x$ 在椭圆内的一段，不包括端点。

将 $y = 3x$ 与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立得两交点 $P(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{6\sqrt{13}}{13}), Q(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{13}}{13})$

所以问题可以转化为直线 $l: y = 4x + m$ 与线段 $y = 3x \quad x \in (-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13})$ 有交点。

$$\text{易得 } m \text{ 的取值范围是 } -\frac{2\sqrt{13}}{13} < m < \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

以上方法在处理其它圆锥曲线时同样适用，但在处理非封闭曲线时，应注意对是否存在的验证。

以上是笔者对这类问题的一点拙见，方法总结未必全面，希望能给各位读者带来帮助，也希望各位读者批评指正。