黄冈市2021年9月高三年级调研考试

数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{x|2\leqslant x<6\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{2,3,4\}$　　B. $\{3,4,5\}$　　C. $\{2,3,4,5\}$　　D. $\{3,4,5,6\}$

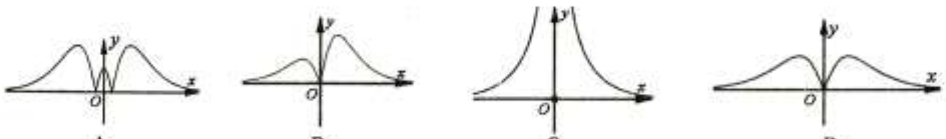
2. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2})$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{21}$　　B. 21　　C. 3　　D. 9

3. 已知圆锥的母线长为 $3\sqrt{2}$，其侧面展开图是一个圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形，则该圆锥的底面面积是

A. π　　B. 2π　　C. 3π　　D. 4π

4. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x|x|}{4^x+1}$，则函数 $y=f(x)$的大致图象为



A.　　B.　　C.　　D.

5. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，A，B 是抛物线上两点，且$|\overrightarrow{AF}|=2|\overrightarrow{BF}|$，且 AB 中点到准线的距离为 3，则 AF 中点到准线的距离为

A．1　　B. 2　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

6. P 为双曲线 $x^2-y^2=1$ 左支上任意一点，EF 为圆 $C:(x-2)^2+y^2=4$ 的任意一条直径，则$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$的最小值为

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 9

7. 已知 $a=4\ln5^{\pi}$，$b=5\ln4^{\pi}$，$c=5\ln\pi^{4}$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<b<a$

8. 普林斯顿大学的康威教授发现了一类有趣的数列并命名为"外观数列"，该数列的后一项由前一项的外观产生. 以 1 为首项的"外观数列"记作 A_1，其中 A_1 为 1，11，21，1211，111221，…，即第一项为 1，外观上看是 1 个 1，因此第二项为 11；第二项外观上看是 2 个 1，因此第三

项为 21；第三项外观上看是 1 个 2，1 个 1，因此第四项为 1211，…，按照相同的规则可得 A_1 其它项，例如 A_3 为 3，13，1113，3113，132113，…．若 A_i 的第 n 项记作 a_n，A_j 的第 n 项记作 b_n，其中 $i,j\in[2,9]$，若 $c_n=|a_n-b_n|$，则 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为

A. $2n|i-j|$　　B. $n(i+j)$　　C. $n|i-j|$　　D. $\frac{1}{2}|i-j|$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 设实数满足 a,b 满足 $2^a<2^b<1$，则下列不等式一定成立的是

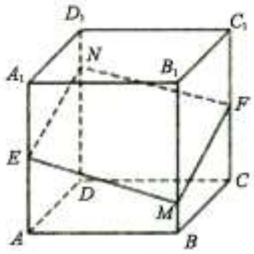
A. $a^2<b^2$　　B. $\ln|a|>\ln|b|$　　C. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$　　D. $a+b+2\sqrt{ab}<0$

10. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})+1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则以下说法正确的是

A. 函数 $y=g(x)$ 在 $[-4,4]$ 在内只有 2 个零点　　B. $g(x-\frac{\pi}{2})=-g(x)$

C. 函数 $y=g(x)$ 的图象关于 $(-\frac{\pi}{6},1)$ 对称　　D. $g(\frac{\pi}{6})\geqslant g(x)$ 恒成立

11. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E,F 分别是棱 AA_1,CC_1 的中点，过直线 EF 的平面分别与棱 BB_1,DD_1 交于 M,N 两点，设 $BM=x,x\in[0,1]$，以下说法中正确的是



A. 平面 $MENF\perp$ 平面 BDD_1B_1

B. 四边形 $MENF$ 的面积最小值为 1

C. 四边形 $MENF$ 周长的取值范围是 $[4,4\sqrt{2}]$

D. 四棱锥 C_1-MENF 的体积为定值

12. 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，M_n,N_n 是圆 $O:x^2+y^2=n^2$ 上两个不同的动点，P_n 是 M_nN_n 的中点，且满足 $\overrightarrow{OM_n}\cdot\overrightarrow{ON_n}+2\overrightarrow{OP_n}^2=0(n\in\mathbf{N}^*)$．设 M_n,N_n 到直线 $l:\sqrt{3}x+y+n^2+n=0$ 的距离之和的最大值为 a_n，则下列说法中正确的是

A. 向量 $\overrightarrow{OM_n}$ 与向量 $\overrightarrow{ON_n}$ 所成角为 120°

B. $|\overrightarrow{OP_n}|=n$

C. $a_n=n^2+2n$

D. 若 $b_n=\frac{a_n}{n+2}$，则数列 $\left\{\frac{2^{b_n}}{(2^{b_n}-1)(2^{b_n+1}-1)}\right\}$ 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 已知函数 $f(x)=(e^x+m\cdot e^{-x})\cdot\sin x$ 是偶函数，则 $m=$________．

14. 曲线 $y=\ln x-\frac{2}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\frac{\sin2\alpha}{3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$________．

15. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{16}{2-\cos x}(0<x<\frac{\pi}{2})$，则 $f(x)$ 的最小值为________．

16. 已知 $m>0$，若存在实数 $x\in[1,+\infty)$ 使不等式成立 $m\cdot2^{mx+1}-\log_{\sqrt{2}}x\leqslant0$ 成立，则 m 的最大值为________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+3$.

(1)若角 α 的顶点在坐标原点 O，始边与 x 轴非负半轴重合，终边与单位圆（圆心为坐标原点 O）交于点 $P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，求 $f(\alpha)$ 的值；

(2)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域.

18.（本小题 12 分）在①$\sqrt{3}(a-c\cos B)=b\sin C$；②$\frac{\sin A-\sin C}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{a+c}$；③$b\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=c\sin B$. 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答问题：

在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足条件________（填写所选条件的序号）.

(1)求角 C；

(2)若△ABC 的面积为 $16\sqrt{3}$，D 为 AC 的中点，求 BD 的最小值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19.（本小题 12 分）已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，若 $2S_n=(n+1)a_n$，且 $a_1>1$，a_2-1，a_4-2，a_6 成等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{4}{a_n a_{n+1}}+2^{-a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\frac{4}{3}$.

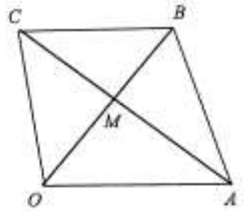
20.（本小题 12 分）已知函数 $f(x)$，对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)-f(y)-x^2-2xy+3x=0$ 恒成立，且 $f(2)=-1$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若函数 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，$G(x)=h(|2^x-1|)+\frac{2m}{|2^x-1|}-5m$ 有三个零点，求 m 的取值范围.

21.(本小题 12 分)

如图，平面四边形 $OABC$ 中，$OA=OB=OC=1$，对角线 AC，OB 相交于 M.



(1)设 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}(0<\lambda<1)$，且 $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OB}(0<t<1)$，

(i)用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示向量 $\overrightarrow{OC}$；

(ii)若 $\angle BOA=\dfrac{\pi}{3}$，记 $\lambda=f(t)$，求 $f(t)$ 的解析式.

(2)在(ii)的条件下，记 $\triangle AMB$，$\triangle CMO$ 的面积分别为 $S_{\triangle AMB}$，$S_{\triangle CMO}$，求 $\dfrac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle CMO}}$ 的取值范围.

22.(本题满分 12 分)已知函数 $f(x)=ax^2+1$，$a\in\mathbf{R}$，函数 $g(x)=e^x-2x+\sin x$.

(1)求函数 $g(x)$ 的单调区间；

(2)记 $F(x)=g(x)-f(x)$，对任意的 $x\geqslant0$，$F(x)\geqslant0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

数学答案与评分标准

一、单项选择题：

1. B　2. C　3. B　4. D　5. D　6. C　7.A　8. C

二、多项选择题：全选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．BCD　10．AC　11．ABD　12.A CD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．-1　14．$\frac{1}{2}$　15．$\frac{25}{2}$　16. $\frac{1}{\mathrm{e}\ln 2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解:（1）$\because$ 角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{-\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………2 分

$\therefore f(\alpha)=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha+3=\frac{7-4\sqrt{3}}{5}$ ……………………5 分

（2） $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+3=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$ ………7 分

$\because x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[2-\sqrt{3},4\right]$ ……………………10 分

18．解:（1）选①,$\because \sqrt{3}(a-c\cdot\cos B)=b\cdot\sin C$

$\therefore \sqrt{3}(\sin A-\sin C\cdot\cos B)=\sin B\cdot\sin C, \therefore \sqrt{3}[\sin(B+C)-\sin C\cdot\cos B]=\sin B\cdot\sin C$

$\therefore \sqrt{3}\sin B\cdot\cos C=\sin B\cdot\sin C, \therefore \tan C=\sqrt{3}, \therefore C=\frac{\pi}{3}$ ………………6 分

选②,$\because \frac{\sin A-\sin C}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{a+c}$,

$\therefore \frac{a-c}{b}=\frac{a-b}{a+c}, \therefore a^2-c^2=ab-b^2, \therefore a^2+b^2-c^2=ab,$

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}, \therefore C=\frac{\pi}{3}$ ……………………6 分

选③,$\because b\cdot\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=c\cdot\sin B$, $\therefore\sin B\cdot\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\sin C\cdot\sin B$,

$\therefore\sin B\cdot\left(\cos C\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin C\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sin C\cdot\sin B$,

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos C=\frac{1}{2}\sin C$, $\therefore\tan C=\sqrt{3}$, $\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ……………………6 分

（2）$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=16\sqrt{3}$,又 $C=\frac{\pi}{3}$, $\therefore ab=64$ …………………8 分

在 ΔBCD 中, $BD^2=BC^2+CD^2-2\cdot BC\cdot CD\cdot\cos C=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2a\cdot\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}ab\ge 2\sqrt{a^2\cdot\frac{b^2}{4}}-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab=32$ ……………………11 分

当且仅当 $a=\frac{b}{2}=4\sqrt{2}$ 时取等号, $\therefore BD$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$ ……………………12 分

19．解:（1）$\because 2S_n=(n+1)a_n$, $\therefore S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$

当 $n\ge 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+1}{2}\cdot a_n-\frac{n}{2}\cdot a_{n-1}$, $\therefore\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$

$\therefore\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\frac{a_1}{1}$, $\therefore a_n=na_1$ ……………………3 分

又 a_2-1，a_4-2，a_6 成等比数列. $\therefore(a_2-1)\cdot a_6=(a_4-2)^2$，

$\therefore(2a_1-1)\cdot 6a_1=(4a_1-2)^2$, $\therefore a_1=2$ 或 $a_1=\frac{1}{2}$.又 $a_1>1$, $\therefore a_1=2$ …………5 分

$\therefore a_n=2n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$……………………6 分

（2）$b_n=\frac{4}{a_n\cdot a_{n+1}}+2^{-a_n}=\frac{4}{2n\cdot 2(n+1)}+2^{-2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]+\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+\cdots+\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$……………………8 分

$$=1-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n}<\frac{4}{3}$$ ……………12 分

20. 解:（1）令 $x=2$， $y=0$，则 $f(2)-f(0)+2=0$，

又 $f(2)=-1$，所以 $f(0)=1$， ……2 分

令 $y=0$，则 $f(x)-f(0)-x^{2}+3x=0$，所以 $f(x)=x^{2}-3x+1$. …………4 分

(2) $h(x)=x+\frac{1}{x}-3$，令 $t=\left|2^{x}-1\right|$，由题意 $t\neq 0$，所以 $t>0$，当 $t\geq 1$，方程 $t=\left|2^{x}-1\right|$ 有一根，当 $0<t<1$，方程有两根，

令 $G(t)=t+\frac{1}{t}-3+\frac{2m}{t}-5m=0$，所以方程 $t^{2}-(3+5m)t+2m+1=0$ 有两不等实根，且 $0<t_{1}<1$， $t_{2}>1$，或 $0<t_{1}<1$， $t_{2}=1$， …………7 分

记 $\varphi(t)=t^{2}-(3+5m)t+2m+1$，所以 $\varphi(t)$ 的零点情况:

①$0<t_{1}<1$， $t_{2}>1$， $\begin{cases}\varphi(0)=2m+1>0\\ \varphi(1)=-3m-1<0\end{cases}$ 所以 $m>-\frac{1}{3}$.

②$0<t_{1}<1$， $t_{2}=1$， $\begin{cases}0<\frac{3+5m}{2}<1\\ \phi(0)=2m+1>0\\ \phi(1)=-3m-1=0\end{cases}$ 所以 $m=-\frac{1}{3}$

综上， $m\geq-\frac{1}{3}$ …………12 分

21. 解:(i)因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{OM}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OC}$，又因为 $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OB}(0<t<1)$，

所以 $t\overrightarrow{OB}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OC}$，所以 $\overrightarrow{OC}=\frac{\lambda-1}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{\lambda}\overrightarrow{OB}$， …………3 分

（ii）因为 $\overrightarrow{OC}^{2}=(\frac{\lambda-1}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{t}{\lambda}\overrightarrow{OB})^{2}$，所以 $1=(\frac{\lambda-1}{\lambda})^{2}+\frac{2(\lambda-1)t}{\lambda^{2}}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{t^{2}}{\lambda^{2}}$，

所以 $\lambda=\frac{t^{2}-t+1}{2-t}$， $(0<t<1)$ 即 $f(t)=\lambda=\frac{t^{2}-t+1}{2-t}$ ， $(0<t<1)$.

…………6 分

（2）

$$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta CMO}}=\frac{\frac{1}{2}AM\cdot MB\sin\angle BMA}{\frac{1}{2}CM\cdot MO\sin\angle CMO}=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{MB}{MO}=\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{1-t}{t}=\frac{t^2-t+1}{t^2+t}\ (0<t<1)$$

，…………8 分

记 $\varphi(t)=\frac{t^2-t+1}{t^2+t}\ (0<t<1)$，所以 $\phi'(t)=\frac{2t(t-1)-1}{(t^2+t)^2}<0$，$\varphi$（$t$）在（0,1）上单调递减，

所以 $\varphi(t)>\frac{1}{2}$，所以 $\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta CMO}}$ 的取值范围为 $(\frac{1}{2},+\infty)$． …………12 分

22. 解：$g'(x)=e^x-2+\cos x$ 且 $g'(0)=0$，令 $\varphi(x)=g'(x)$，φ'（x）$=e^x-\sin x$，

………1 分

$x\in(0,+\infty)$，$\varphi'(x)=e^x-\sin x>1-\sin x\geq 0$，

所以 $\varphi(x)=g'(x)>g'(0)=0$，所以 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，

$x\in(-\infty,0)$，$g'(x)=e^x-2+\cos x<\cos x-1\leq 0$， ………3 分

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$． ………5 分

(2) $F(x)=g(x)-f(x)=e^x-2x+\sin x-ax^2-1$，且 $F(0)=0$，

$F'(x)=e^x+\cos x-2ax-2$，令 $G(x)=F'(x)$，$G'(x)=e^x-\sin x-2a$，

令 $H(x)=G'(x)$，$H'(x)=e^x-\cos x\geq 1-\cos x\geq 0$，所以 $G'(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，

①若 $a\leq\frac{1}{2}$，$G'(x)\geq G'(0)=1-2a\geq 0$，所以 $F'(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $F'(x)\geq F'(0)=0$，所以 $F(x)\geq F(0)=0$ 恒成立. ………9 分

②若 $a>\frac{1}{2}$，$G'(0)=1-2a<0$，$G'(\ln(2a+2))=2-\sin(2a+2)>0$，所以存在

$x_0\in(0,\ln(2a+2))$，使 $G'(x_0)=0$，且 $x\in(0,\ln(2a+1))$，$G'(x)<0$，

$F'(x)\leq F'(0)=0$，所以 $F(x)\leq F(0)=0$，不合题意.

综上，$a\leq\frac{1}{2}$. ………12 分