2020-2021 学年度第一学期高一数学期末复习二

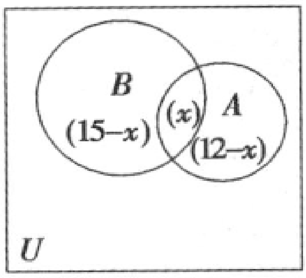
班级 ________ 学号________ 姓名 ________ 自我评价__________

一、单项选择题(本大题共 6 小题)

1. 某校田径队共 30 人，主要练 100 米、200 米与 400 米.其中练 100 米的有 12 人，练 200 米的有 15 人，只练 400 米的有 8 人，没有人同时练 100 米与 400 米，则只练 100 米的人数为$(\quad)$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解：根据题意，可用 *Venn* 图表示，如图，A 表示练 100 米的人员组成的集合，B 表示练 200 米的人员组成的集合，$C_U(A\cup B)$表示只练 400 米的人员组成的集合，U 表示田径队共 30 人组成的集合．设既练 100 米又练 200 米的人数为 x，则只练 100 米的人数为$12-x$，所以$12-x+15+8=30$，解得$x=5$．所以只练 100 米的人数为$12-5=7$．故选 C.



2. 王昌龄是盛唐著名的边塞诗人，被誉为“七绝圣手”，其《从军行》传诵至今，“青海长云暗雪山，孤城遥望玉门关．黄沙百战穿金甲，不破楼兰终不还”，由此推断，其中最后一句“攻破楼兰”是“返回家乡”的$(\quad)$

A. 必要条件；B. 充分条件；C. 充要条件；D. 既不充分又不必要条件

解：由题意可知：“返回家乡”则可推出“攻破楼兰”，故“攻破楼兰”是“返回家乡”必要条件，故选 A.

3. 《九章算术》是我国古代数学名著，其中有这样一个问题：“今有宛田，下周三十步，径十六步，问为田几何？”意思说：现有**扇形**田，**弧长三十步，直径十六步**，问面积多少？在此问题中，扇形的圆心角的弧度数是$(\quad)$

A. $\frac{4}{15}$　　B. $\frac{15}{8}$　　C. $\frac{15}{4}$　　D. 120

解：$S=\frac{30\times16}{4}=120$(平方步)，设扇形的半径为 R，圆心角为α，$S=\frac{1}{2}\alpha R^2$，即$120=\frac{1}{2}\alpha\times64\Rightarrow\alpha=\frac{15}{4}$.

故选 C.

4. 在标准温度和大气压下，人体血液中氢离子的物质的量的浓度(单位mol/L，记作$[H^+]$)和氢氧根离子的物质的量的浓度(单位mol/L，记作$[OH^-]$)的乘积等于常数10^{-14}.已知 pH 值的定义为$pH=-\lg[H^+]$，健康人体血液的 pH 值保持在$7.35\sim7.45$之间，那么健康人体血液中的$\frac{[H^+]}{[OH^-]}$可以为(参考数据：$lg2\approx0.30$，$lg3\approx0.48$)$(\quad)$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{10}$

解：$\because[H^+]\cdot[OH^-]=10^{-14}$，$\therefore\frac{[H^+]}{[OH^-]}=[H^+]^2\times10^{14}$，$\because 7.35<-\lg[H^+]<7.45$，

$\therefore10^{-7.45}<[H^+]<10^{-7.35}$，$\therefore10^{-0.9}<\frac{[H^+]}{[OH^-]}=10^{14}\cdot[H^+]^2<10^{-0.7}$，$10^{-0.9}=\frac{1}{10^{0.9}}>\frac{1}{10}$，

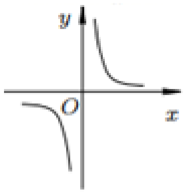
$\lg(10^{0.7})=0.7>\lg3>\lg2$，$\therefore10^{0.7}>3>2$，$10^{-0.7}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{1}{10}<\frac{[H^+]}{[OH^-]}<\frac{1}{2}$，故选 C.

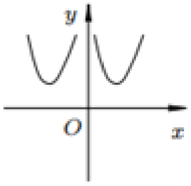
5. 函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$内有最大值无最小值，则$\omega$的取值范围是$(\quad)$

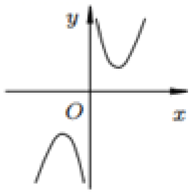
A. $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right]$　　B. $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{4}{3},\frac{16}{3}\right]$　　D. $\left(\frac{4}{3},\frac{16}{3}\right)$

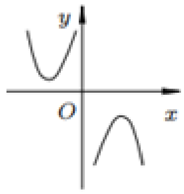
解：∵ $f(x)=2sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$，令：$\omega x+\frac{\pi}{6}=t$，则$y=2sint$，$t\in\left(-\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{6},\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$，$f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$内有最大值无最小值，则$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}<\frac{\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$,解得：$\begin{cases}-\frac{4}{3}<\omega\le\frac{8}{3}\\ \frac{4}{3}<\omega\le\frac{16}{3}\end{cases}$ 即$\omega\in\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right]$,故选 A.

6. 函数$f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{x^2}$的图象大致为(   )

A. 

B. 

C. 

D. 

解:$f(-x)=\frac{3^{-x}-3^x}{x^2}=-f(x)$,则函数$f(x)$是奇函数,图象关于原点对称,排除 B,当$x\to+\infty$,$f(x)\to+\infty$,排除 A，D，故选：C.

二、多项选择题(本大题共 4 小题)

7. 若$0<c<1$，$a>b>1$，则(   )

A. $\log_a c>\log_b c$；B. $ab^c>ba^c$；C. $alog_b c>blog_a c$；D. $a(b-c)>b(a-c)$

解：A、因为$0<c<1$，$a>b>1$，所以$0>\log_a c>\log_b c$，故 A 正确；C、由 A 得$0>\log_a c>\log_b c$，所以$0<-\log_a c<-\log_b c$，故$-blog_a c<-alog_b c$，即$blog_a c>alog_b c$，即$alog_b c<blog_a c$，故 C 错误；B、$ab^c>ba^c\Leftrightarrow\frac{b^c}{b}>\frac{a^c}{a}$，即$b^{c-1}>a^{c-1}$，因为$y=x^{c-1}$是减函数，且$a>b>1$，故 B 正确；D、$a(b-c)>b(a-c)$等价于$ac<bc$，已知$a>b$且$c>0$，所以$ac>bc$，故 D 错误．故选 AB.

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，角α以 Ox 为始边，终边经过点$P(-1,m)(m>0)$，则下列各式的值一定为负的是(   )

A. $\sin\alpha+\cos\alpha$　　B. $\sin\alpha-\cos\alpha$　　C. $\sin\alpha\cos\alpha$　　D. $\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

解：由题意$|OP|=r=\sqrt{(-1)^2+m^2}=\sqrt{m^2+1}$，则$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}>0$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}=-\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}<0$，所以$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{m-1}{\sqrt{m^2+1}}$,由于$m-1$符号无法确定,即 A 不符合题意;又$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{m+1}{\sqrt{m^2+1}}>0$,即 B 不符合题意；$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{m^2+1}}=-\frac{m}{m^2+1}<0$，即 C 符合题意；$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\cos\alpha<0$，即 D 符合题意．故选 CD.

9. 对于函数$f(x)=2sin(2x-\frac{\pi}{6})(x\in R)$，下列命题正确的是(   )

A. $f(x)$图像关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称；

B. 将$f(x)$图像的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到$y=2sin(x-\frac{\pi}{6})$的图像；

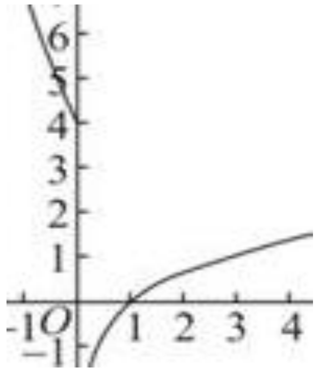
C. $f(x)$在$(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$上单调递增；　　D. $f(x)$的表达式可改写成$y=2cos(2x+\frac{\pi}{3})$

解：$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin[2\times(-\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{6}]=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$，故 A 正确；将$f(x)$图象的横坐标伸长 2 倍，纵坐标不变，得到$y=2sin(x-\frac{\pi}{6})$的图象，故 B 正确；由$2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x-\frac{\pi}{6}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$得$f(x)$在

$(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3})$单调递增，所以$f(x)$不单调，故 C 错误；

$y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故 D 错误．故选 AB.

10. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+4,x\leqslant 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$若函数$g(x)=f^2(x)+3f(x)+m(m\in R)$有三个零点，则下列结论正确的是(　)



A. 函数$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,0]$；B. 函数$f(x)$的零点为$x=0$；

C. 函数$f(x)$的零点为$x=1$；D. $m\in(-\infty,-28]$

解：作出$f(x)$的图象如图所示：所以 A，C 正确，B 错误；设$t=f(x)$，则由图象知：当$t\geq 4$时，$t=f(x)$有两个根；当$t<4$时，$t=f(x)$只有一个根．若函数$g(x)=f^2(x)+3f(x)+m(m\in R)$有三个零点等价于函数$h(t)=t^2+3t+m=0$有两个解，其中$t_1<4$，$t_2\geq 4$，则满足$\begin{cases}\Delta=9-4m>0,\\ h(4)=16+12+m\leqslant 0.\end{cases}$解得$m\leq -28$，所以 D 正确．故选 ACD.

三、填空题(本大题共 4 小题)

11.16 至 17 世纪之交，随着天文、航海、工程、贸易以及军事的发展，改进数字计算方法成了当务之急，约翰·纳皮尔正是在研究天文学的过程中，为了简化其中的计算而发明了对数．后来数学家欧拉发现了对数与指数的关系，即$a^b=N\Leftrightarrow b=\log_a N$.现在已知$2^a=3$，$3^b=4$，则$ab=$______.

解：$\because 2^a=3$，$3^b=4$，$\therefore a=\log_2 3$，$b=\log_3 4$.$\therefore a=\frac{lg3}{lg2}$，$b=\frac{lg4}{lg3}$．$\therefore ab=\frac{lg3}{lg2}\cdot\frac{lg4}{lg3}=2$．故答案为：2.

12. 将函数$y=3sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是______.

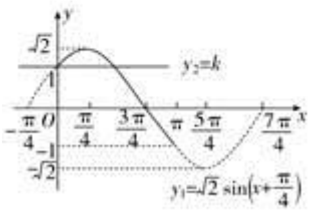
解：因为函数$y=3sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度可得

$g(x)=f(x-\frac{\pi}{6})=3sin(2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=3sin(2x-\frac{\pi}{12})$，则$y=g(x)$的对称轴为$2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，

即$x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$，当$k=0$时，$x=\frac{7\pi}{24}$，当$k=-1$时，$x=-\frac{5\pi}{24}$，所以平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是$x=-\frac{5\pi}{24}$，故答案为：$x=-\frac{5\pi}{24}$.

13. 已知关于 x 的方程$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=k$在$[0,\pi]$上有两解，则实数 k 的取值范围是________.

解：令$y_1=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(0\leq x\leq\pi)$，$y_2=k$，在同一坐标系内作出它们的图象如图中实线部分，由图象可知，当$1\leq k<\sqrt{2}$时，直线$y_2=k$与曲线$y_1=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(0\leq x\leq\pi)$有两个公共点，即$1\leq k<\sqrt{2}$时，原方程有两解．故答案为$1\leq k<\sqrt{2}$.



14. 已知实数 x，y 满足$5x-xy-y=-6(x>-1)$，则$2x+y$的最小值是______.

解：$\because 5x-xy-y=-6(x>-1)$，$\therefore y=\frac{5x+6}{x+1}=5+\frac{1}{x+1}$，则

$2x+y=2x+\frac{1}{x+1}+5=2(x+1)+\frac{1}{x+1}+3\geq 3+2\sqrt{2}$当且仅当$2(x+1)=\frac{1}{x+1}$即$x=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$时取得最小值$3+2\sqrt{2}$故答案为：$3+2\sqrt{2}$

四、解答题(本大题共 4 小题)

15. 已知集合 A 是函数$y=\lg(6+5x-x^2)$的定义域，集合 B 是不等式$x^2-2x+1-a^2\geq 0(a>0)$的解集．p：$x\in A$，q：$x\in B$．

(1)若$A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围；

(2)若$\neg p$是 q 的充分不必要条件，求 a 的取值范围．

解：(1)由条件得：$A=\{x|-1<x<6\}$，$B=\{x|x\geq a+1$，或$x\leq 1-a\}$，若$A\cap B=\varnothing$，则必须满足$\begin{cases}1+a\geq 6\\1-a\leq -1\\a>0\end{cases}$，解得$a\geq 5$，所以，a 的取值范围的取值范围为：$[5,+\infty)$；

(2)易得：$\neg p$：$\{x|x\geq 6$或$x\leq -1\}$，$\because \neg p$是 q 的充分不必要条件，$\therefore \{x|x\geq 6$或$x\leq -1\}$是$\{x|x\geq a+1$或$x\leq 1-a\}$的真子集，则$\begin{cases}6\geq 1+a\\-1\leq 1-a\\a>0\end{cases}$且等号不同时成立，解得$0<a\leqslant 2$，$\therefore a$的取值范围的取值范围为：$(0,2]$．

16. 若$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，求$\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)[\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)-1]}+\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}-\alpha)}{\cos(3\pi+\alpha)\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)-\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)}$的值．

解：

$$\frac{\cos(3\pi-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)[\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)-1]}+\frac{\sin(\frac{5\pi}{2}-\alpha)}{\cos(3\pi+\alpha)\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)-\sin(\frac{7\pi}{2}+\alpha)}=\frac{\cos[2\pi+(\pi-\alpha)]}{\cos\alpha[\sin(3\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)-1]}+\frac{\sin[2\pi+(\frac{\pi}{2}-\alpha)]}{\cos(\pi+\alpha)\sin[2\pi+(\frac{\pi}{2}+\alpha)]-\sin[3\pi+(\frac{\pi}{2}+\alpha)]}$$

$$=\frac{-\cos\alpha}{\cos\alpha(-\cos\alpha-1)}+\frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{1+\cos\alpha}+\frac{1}{1-\cos\alpha}=\frac{2}{\sin^2\alpha}$$．$\because \sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \frac{2}{\sin^2\alpha}=10$，即原式$=10$．

17. 已知甲、乙两个旅游景点之间有一条 5km 的直线型水路，一艘游轮以xkm/h的速度航行时(考虑到航线安全要求$20\leq x\leq 50$)，每小时使用的燃料费用为$\frac{x}{40}-k$万元(k为常数，且$\frac{1}{15}\leq k\leq\frac{1}{5}$)，其他费用为每小时$\frac{1}{x}$万元．

(1)若游轮以$30km/h$的速度航行时，每小时使用的燃料费用为$\frac{5}{8}$万元，要使每小时的所有费用不超过$\frac{9}{10}$万元，求 x 的取值范围；

(2)求该游轮单程航行所需总费用的最小值．

解：(1)由题意$x=30$时，每小时使用的燃料费为$\frac{30}{40}-k=\frac{5}{8}$，解得$k=\frac{1}{8}$；此时每小时的所有费用为$\frac{x}{40}-\frac{1}{8}+\frac{1}{x}\leq\frac{9}{10}$，化简得$x^2-41x+40\leq 0$，解得$1\leq x\leq 40$；又$20\leq x\leq 50$，$\therefore 20\leq x\leq 40$，$\therefore x$的取值范围是$[20,40]$；

(2)设该游轮单程航行所需总费用为 y 万元，则$y=\frac{5}{x}\cdot(\frac{x}{40}-k+\frac{1}{x})=\frac{1}{8}-\frac{5k}{x}+\frac{5}{x^2}(20\leq x\leq 50)$，令$t=\frac{1}{x}$，则$t\in[\frac{1}{50},\frac{1}{20}]$，即$y=5t^2-5kt+\frac{1}{8}$；由$\frac{1}{15}\leq k\leq\frac{1}{5}$，得对称轴$t=\frac{k}{2}\in[\frac{1}{30},\frac{1}{10}]$；①若$\frac{k}{2}<\frac{1}{20}$，即$\frac{1}{15}\leq k<\frac{1}{10}$，则函数$y=5t^2-5kt+\frac{1}{8}$在$[\frac{1}{50},\frac{k}{2}]$上单调递减，在$[\frac{k}{2},\frac{1}{20}]$上单调递增；故当$t=\frac{k}{2}$，即$x=\frac{2}{k}$时，$y$ 取得最小值为$y_{min}=\frac{1-10k^2}{8}$；②若$\frac{k}{2}\geq\frac{1}{20}$，即$\frac{1}{10}\leq k\leq\frac{1}{5}$，则函数$y=5t^2-5kt+\frac{1}{8}$在$[\frac{1}{50},\frac{1}{20}]$上单调递减，故当

$t=\frac{1}{20}$，即$x=20$时，y取得最小值为$y_{min}=\frac{11-20k}{80}$；综上所述，当$\frac{1}{15}\le k<\frac{1}{10}$时，该游轮单程航行所需总费用的最小值为$\frac{1-10k^2}{8}$万元，当$\frac{1}{10}\le k\le\frac{1}{5}$时，该游轮单程航行所需总费用的最小值为$\frac{11-20k}{80}$万元.

18. 对任意实数a，b，定义函数$F(a,b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$，已知函数$f(x)=x^2-mx+n$，$g(x)=2|x-1|$，记$H(x)=F(f(x),g(x))$.

(1)若对于任意实数x，不等式$f(x)\ge g(2)+n-5$恒成立，求实数m的取值范围；

(2)若$2m-n=2$，且$m\in[6,+\infty)$，求使得等式$H(x)=f(x)$成立的x的取值范围；

(3)在(2)的条件下，求$H(x)$在区间$[0,6]$上的最小值．解：(1)由题意可得，$x^2-mx+n\ge g(2)+n-5=n-3$恒成立，即$x^2-mx+3\ge 0$对任意的x恒成立，所以$\Delta=m^2-12\le 0$，解得$m\in[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}]$；

(2)因为$2m-n=2$，所以$f(x)=x^2-mx+2m-2$，由$F(a,b)=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$知，$F(a,b)=\begin{cases}b,a\ge b\\a,a<b\end{cases}$，所以$H(x)=F(f(x),g(x))=f(x)$，所以$m\in[6,+\infty)$时，$f(x)\le g(x)$；①当$x\ge 1$时，$x^2-mx+2m\le 2x-2$，所以$(x-2)(x-m)\le 0$，又因为$m\ge 6$，所以$x\in[2,m]$；②当$x<1$时，$x^2-mx+2m\le -2x+2$，所以$x^2+(2-x)(m-2)\le 0$，因为$m\ge 6$，$x<1$，所以$2-x>0$，$m-2>0$，所以上式不成立；综上可知，$x$的取值范围是$[2,m]$；(3)由(2)知，$m\ge 6$且$H(x)=\begin{cases}g(x),0\le x<2\\f(x),2\le x\le 6\end{cases}$，即$H(x)=\begin{cases}2|x-1|,0\le x<2\\x^2-mx+2m-2,2\le x\le 6\end{cases}$所以当$0\le x<2$时，$H(x)=2|x-1|$，所以$H(x)_{max}=H(1)=0$，当$2\le x\le 6$时，$H(x)=x^2-mx+2m-2=(x-\frac{m}{2})^2-\frac{m^2}{4}+2m-2$，①当$2\le\frac{m}{2}\le 6$时，又$m\ge 6$，即$6\le m\le 12$时，$H(x)_{min}=H(\frac{m}{2})=-\frac{m^2}{4}+2m-2$；②当$\frac{m}{2}>6$时，即$m>12$时，$H(x)_{min}=H(6)=-4m+34$；综上，$H(x)_{min}=min\{0,-\frac{m^2}{4}+2m-2,-4m+34\}$，由$\begin{cases}-4m+34\ge 0\\-\frac{m^2}{4}+2m-2\ge 0\\m\ge 6\end{cases}$，解得$6\le m\le 4+2\sqrt{2}$时，$H(x)_{min}=0$；由$\begin{cases}-4m+34<0\\-4m+34<-\frac{m^2}{4}+2m-2\\m\ge 6\end{cases}$，整理得$(m-12)^2<0$，无实根；由$\begin{cases}-\frac{m^2}{4}+2m-2<0\\-4m+34\ge-\frac{m^2}{4}+2m-2\\m\ge 6\end{cases}$，解得$m>4+2\sqrt{2}$时，$H(x)_{min}=-\frac{m^2}{4}+2m-2$；综上$H(x)_{min}=\begin{cases}0,6\le m\le 4+2\sqrt{2}\\-\frac{m^2}{4}+2m-2,m>4+2\sqrt{2}\end{cases}$.